Государственное предприятие
"Всероссийский научно-исследовательский
институт метрологии им. Д.И. Менделеева"

РУКОВОДСТВО

по выражению неопределенности измерения

Санкт-Петербург
1999

РУКОВОДСТВО ПО ВЫРАЖЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ

Руководство устанавливает общие правила оценки и выражения неопределенности измерения, которые, как намечено, должны быть применимы к широкому спектру измерений. Основой для Руководства является Рекомендация 1 (CI-1981) Международного комитета мер и весов (МКМВ, CIPM) и Рекомендация INC-1 (1980) Рабочей группы по определению неопределенностей. Рабочая группа была организована Международным бюро мер и весов (МБМВ) по поручению МКМВ. Рекомендация МКМВ является единственной, касающейся выражения неопределенности измерения и одобренной межправительственной организацией.

Руководство подготовлено объединенной рабочей группой, состоящей из экспертов, назначенных МБМВ, МЭК, ИСО и МОЗМ.

Следующие семь организаций поддержали подготовку этого *Руководства*, которое публикуется по их поручению:

Международное бюро мер и весов (МБМВ, BIPM)
Международная электротехническая комиссия (МЭК, IEC)
Международная федерация клинической химии (МФКХ, IFCC)
Международная организация по стандартизации (ИСО, ISO)
Международный союз по чистой и прикладной химии (ИЮПАК, IUPAC)
Международный союз по чистой и прикладной физике (ИЮПАП. IUPAP)
Международная организация законодательной метрологии (МОЗМ, OIML)

Пользователей *Руководства* приглашают присылать свои комментарии и вопросы для разъяснения в любую из семи поддерживающих организаций, почтовые адреса которых приведены ниже.

BIPM Bureau international des poids et mesures
Pavilion de Breteuil
F.92312 Sèvres Cedex
France

IEC International Electrotechnical Commission
3, rue de Varembé
Case postale 131
CH-1211 Genève20
Switzerland

IFCC International Federation of Clinical Chemistry
Technical Secretariat
Centre du Mèdicament
Université de Nancy I
30, rue Lionnais
F-54000 Nancy
France

ISO International Organization for Standardization
1, rue de Varembé
Case postale 56
CH-1211 Genève 20
Switzerland

IUPAC International Union of Pure and Applied Chemistry
Bank Court Chambers
2-3 Pound Way
Templars Square, Cowley
Oxford 0X4 3YF
United Kingdom

IUPAP International Union of Pure and Applied Physics
Secretariat
Vittens gata 11
S-42165 V. Frölunda
Sweden

OIML International Organization of Legal Metrology
11, rue Turgot
F-75009 Paris
France

Перевод с английского.

Аннотация. Руководство устанавливает общепринятые правила оценивания и выражения неопределенности в измерении.

Дескрипторы: измерение, результат измерения, стандартное отклонение, неопределенность, стандартная неопределенность, суммарная неопределенность, расширенная неопределенность, погрешность случайная и систематическая

Перевод аутентичен оригиналу. Количество: стр. 134, рис. 4, табл. 10. Переводчики: ОНТИ ГП "ВНИИМ им. Д.И.Менделеева". Научный редактор проф. Слаев В.А.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

В 1978 г., признавая отсутствие международного единства по вопросу выражения неопределенности измерения, наивысший мировой авторитет в метрологии - Международный комитет мер и весов (МКМВ) обратился к Международному бюро мер и весов (МБМВ) с просьбой рассмотреть эту проблему совместно с национальными метрологическими лабораториями и разработать рекомендацию.

МБМВ подготовило подробную анкету, включающую все интересующие вопросы, и разослало ее 32 национальным метрологическим лабораториям, которые, как известно, интересуются данным вопросом (и, с информативной целью, пяти международным организациям). К началу 1979 г. были получены ответы из 21 лаборатории [1]. Почти все полагали, что важно прийти к принятой в международном масштабе методике для выражения неопределенности измерения и для суммирования частных составляющих неопределенности в одну общую неопределенность. Однако не было принято единого решения о методе, которым следует пользоваться. Тогда МБМВ организовало встречу с целью принятия единой и общепризнанной методики для определения неопределенности; ее посетили эксперты из 11 национальных метрологических лабораторий. Рабочая группа по составлению отчета о неопределенностях разработала Рекомендацию INC-1 (1980) "Выражение экспериментальных неопределенностей" [2]. Рекомендация была принята МКМВ в 1981 г. [3] и вновь утверждена в 1986 г. [4].

Задачу разработки подробного Руководства, основанного на Рекомендации Рабочей группы (которая является скорее кратким описанием, а не подробным предписанием) МКМВ передала Международной организации по стандартизации (ИСО), которая могла лучше выразить потребности, возникающие из широких интересов промышленности и торговли.

Ответственность была возложена на Техническую консультативную группу по метрологии ИСО (TAG 4), поскольку одной из ее задач является координация развития основных направлений в области измерений, которые представляют взаимный интерес для ИСО и шести организаций, принимающих участие вместе с ИСО в работе TAG 4: Международной электротехнической комиссии (МЭК), партнера ИСО по всемирной стандартизации; МКМВ и Международной организации законодательной метрологии (МОЗМ) - двух мировых метрологических организаций; Международного союза по чистой и прикладной химии (ИЮПАК) и Международного союза по чистой и прикладной физике (ИЮПАП), двух международных союзов, представляющих химию и физику, и Международной федерации клинической химии (МФКХ).

TAG 4, в свою очередь, учредила Рабочую группу 3 (ISO/TAG 4/WG 3), состоящую из экспертов, предложенных МБМВ, МЭК, ИСО и МОЗМ и назначенных председателем TAG 4. Перед ней была поставлена следующая задача:

> разработать руководящий документ, базирующийся на Рекомендации Рабочей группы МБМВ по составлению отчета о неопределенностях, который давал бы правила выражения неопределенности измерения и использовался бы службами стандартизации, калибровки, аккредитации лабораторий и метрологии.

Цель данного руководства:

- обеспечить полную информацию о том, как составлять отчеты о неопределенностях;
- предоставить основу для международного сличения результатов измерения.

0 ВВЕДЕНИЕ

0.1 При составлении отчета о результате измерения физической величины необходимо дать какое-либо количественное указание о качестве результата так, чтобы те, кто используют этот результат, могли бы оценить его надежность. Без такого указания результаты измерения нельзя сличить как друг с другом, так и со справочными значениями, данными в спецификации или стандарте. Поэтому необходимо наличие простой в применении, понятной и общепризнанной методики для характеристики качества результата измерения, т.е. для оценки и выражения его *неопределенности.*

0.2 Понятие "*неопределенности*", как определяемого в количественном отношении атрибута, является относительно новым в истории измерения, хотя термины "*погрешность*" и "*анализ погрешностей*" давно уже используются в практике науки об измерениях или метрологии. Сейчас общепризнанно, что, когда все известные или предполагаемые компоненты погрешности оценены и внесены соответствующие поправки, все еще остается неопределенность относительно истинности указанного результата, т.е. сомнение в том, насколько точно результат измерения представляет значение измеряемой величины.

0.3 Также, как Международная система единиц (СИ), будучи системой практически универсального использования, привнесла согласованность во все научные и технологические измерения, всемирное единство в оценке и выражении неопределенности измерения обеспечило бы должное понимание и правильное использование широкого спектра результатов измерений в науке, технике, торговле, промышленности и регулирующих актах. В эру глобального рынка настоятельно необходимо, чтобы метод для оценки и выражения неопределенности был единым во всем мире так, чтобы измерения, проводимые в разных странах, можно было легко сличать.

0.4 Идеальный метод для оценки и выражения неопределенности результата измерения должен быть:

- *универсальным*: метод должен быть применим ко всем видам измерений и всем типам входящих данных, используемых в измерениях;

Величина, непосредственно используемая для выражения неопределенности, должна быть:

- *внутренне согласующейся*: она должна непосредственно выводиться из компонентов, составляющих ее, а также быть независимой от того, как эти компоненты группируются, и от деления компонентов на подкомпоненты;

- *допускающей передачу*: должна существовать возможность непосредственного использования неопределенности, оцененной для одного результата, как составляющей при оценке неопределенности другого измерения, в котором используется первый результат.

Далее, при многих промышленных и коммерческих применениях, а также в области здравоохранения и безопасности часто необходимо давать результат измерения с указанием интервала, в пределах которого, можно предполагать, находится большая часть распределения значений, которые обоснованно могут быть приписаны величине, подлежащей измерению. Таким образом, идеальный метод для оценки и выражения неопределенности измерения должен предоставлять возможность указать такой интервал, в частности, интервал с вероятностью охвата или уровнем доверия, который реально соответствует требуемому.

0.5 Этот руководящий документ базируется на методе, приведенном в Рекомендации INC-1 (1980) [2] Рабочей группы по составлению отчета о неопределенностях, которая была созвана МБМВ по просьбе МКМВ (см. Предисловие). Эта рекомендация, обоснование которой обсуждается в Приложении Е, соответствует всем требованиям, указанным выше. Это не всегда так в большинстве других методов, используемых сегодня. Рекомендация INC-1 (1980) была одобрена и вновь подтверждена МКМВ в его собственных рекомендациях 1 (CI-1981) [3] и 1 (CI-1986) [4]. Перевод этих Рекомендаций МКМВ приведен в Приложении А (см. А.2 и А.3, соответственно). Поскольку этот документ опирается на Рекомендацию INC-1 (1980), ее перевод приведен в 07 и французский текст, который является авторским, - в А.1.

0.6 Краткая описание методики оценки и выражения неопределенности, приведенной в этом руководящем документе, дано в разделе 8 и ряд примеров подробно представлен в Приложении H. Другие приложения касаются общих терминов в метрологии (Приложение B), основных статистических терминов и понятий (Приложение C), "истинного" значения, погрешности и неопределенности (Приложение D), практического руководства по оценке составляющих неопределенности (Приложение F), степеней свободы и уровней доверия (Приложение G), основных математических символов, используемых в этом документе (Приложение J) и библиографических ссылок (Приложение K). В конце документа дан алфавитный указатель.

0.7. РЕКОМЕНДАЦИЯ INC-1 (1980)

Выражение экспериментальных неопределенностей

1 Неопределенность в результате измерения обычно состоит из нескольких составляющих, которые можно сгруппировать в две категории в соответствии со способом оценки их численного значения:

A. составляющие, которые оцениваются путем применения статистических методов,
B. составляющие, которые оцениваются другими способами.

Не всегда можно провести простую параллель между классификацией по категориям A и B и ранее используемой классификацией по "случайным" и "систематическим" неопределенностям. Термин "систематическая неопределенность" может вносить неясность и поэтому его следует избегать.

Любой подробный отчет о неопределенности должен содержать полный список составляющих с указанием для каждой из них метода, используемого для получения ее численного значения.

2 Составляющие в категории A характеризуются оцененными дисперсиями s^2_i (или оцененными стандартными отклонениями s_i) и числом степеней свободы v_i. В случае необходимости следует указать ковариации.

3. Составляющие в категории B должны характеризоваться величинами u^2_j, которые можно рассматривать как аппроксимации к соответствующим дисперсиям, существование которых предполагается. Величины u^2_j можно рассматривать как дисперсии, а величины u_j - как стандартные отклонения. При необходимости ковариации должны рассматриваться аналогично.

4. Суммарная неопределенность должна характеризоваться численным значением, полученным путем использования обычного метода для сложения дисперсий. Суммарная неопределенность и ее составляющие должны выражаться в виде "стандартных отклонений".

5 Если в особых случаях необходимо умножить суммарную неопределенность на какой-то множитель, чтобы получить общую неопределенность, то всегда должен быть указан используемый множитель.

РУКОВОДСТВО ПО ПРЕДСТАВЛЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ

1 РАССМАТРИВАЕМЫЙ ВОПРОС

1.1 Это *Руководство* устанавливает общие правила оценивания и выражения неопределенности измерения, которые следует соблюдать при различных уровнях точности и во многих областях, начиная от магазина до фундаментальных исследований. Поэтому принципы этого *Руководства* предназначены для использования в широком спектре измерений, включая те, которые требуются для:

- поддержания контроля качества и обеспечения качества в процессе производства;
- согласованности и усиления законов и регулирующих актов;
- проведения фундаментальных и прикладных исследований и разработок в науке и технике;
- калибровочных эталонов и приборов и проведения испытаний по всей национальной системе измерений для обеспечения единства измерений по национальным эталонам;
- разработки, поддержания и сличения международных и национальных эталонов единиц физических величин, включая стандартные образцы свойств веществ и материалов.

1.2 Это *Руководство*, главным образом, рассматривает выражение неопределенности измерения хорошо определенной физической величины - измеряемой величины, характеризуемой единственным значением. Если явление, представляющее интерес, можно представить только как распределение значений или оно зависит от одного или более параметров, таких как время, тогда измеряемые величины, требуемые для его описания, представляют собой ряд величин, описывающих это распределение или эту зависимость.

1.3 Это *Руководство* также применяется для оценивания и выражения неопределенности, связанной с концептуальным расчетом и теоретическим анализом экспериментов, методов измерения и комплексных компонентов и систем. Так как результат измерения и его неопределенность могут быть умозрительными и полностью основанными на гипотетических данных, то термин "результат измерения", используемый в этом *Руководстве*, следует толковать в этом более широком контексте.

1.4 Это *Руководство* дает общие правила оценивания и выражения неопределенности измерения, а не подробные специальные технологические инструкции. Далее, в нем не обсуждается вопрос о том, как неопределенность конкретного результата измерения, оцененная однажды, может быть использована для различных целей, например, чтобы сделать выводы о совместимости этого результата с другими аналогичными результатами, для установления пределов на допуск в производственном процессе или для решения вопроса, можно ли безопасно предпринять определенный ход операции. Поэтому, может быть, необходимо создать конкретные стандарты, основанные на этом *Руководстве*, в которых бы рассматривались проблемы, характерные для специфичных областей измерения, или различные применения количественных выражений неопределенности. Эти стандарты могут быть упрощенными версиями данного *Руководства*, но должны содержать в себе подробности, которые соответствуют данному уровню точности и сложности измерений и характерны для конкретных случаев применения.

ПРИМЕЧАНИЕ - Могут встречаться ситуации, в которых концепция неопределенности измерения не полностью применима, например, когда точность метода испытаний определена (см., например, [5]).

2 ОПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1 Общие метрологические термины

Определение ряда общих метрологических терминов, используемых в этом *Руководстве*, таких, как "измеримая величина", "измеряемая величина" и "погрешность измерения", даны в Приложении В. Эти определения взяты из *Международного словаря основных и общих терминов в метрологии* (сокращенно VIM) [6]. Кроме того, в Приложении С даются определения ряда основных статистических терминов, взятых большей частью из Международного стандарта ИСО 3534-1 [7]. Когда один из этих метрологических или статистических терминов (или близко с ним связанный термин) впервые используется в тексте, начиная с раздела 3, он печатается жирным шрифтом, а номер подраздела, в котором он определен, ставится в скобках.

Поскольку определение общего метрологического термина "неопределенность измерения" представляет особую важность для этого *Руководства*, то оно дается как в Приложении В, так и в 2.2.3. Определения наиболее важных терминов, характерных для этого *Руководства*, даны в 2.3.1-2.3.6. Во всех этих подразделах и в Приложениях В и С использование скобок вокруг определенных слов некоторых терминов означает, что их можно опустить, если маловероятно, что это вызовет путаницу.

2.2 Термин "неопределенность"

Понятие неопределенности далее обсуждается в разделе 3 и Приложении D.

2.2.1 Слово "неопределенность" означает сомнение и, таким образом, в своем самом широком смысле "неопределенность измерения" означает сомнение относительно достоверности результата измерения. Из-за отсутствия различных слов для этого *общего понятия* неопределенности и специальных величин, которые дают *количественные меры* этого понятия, как, например, стандартное отклонение, необходимо использовать слово "неопределенность" в этих двух различных смыслах.

2.2.2 В этом *Руководстве* слово "неопределенность", используемое без прилагательных, относится как к общему понятию, так и к любым или всем количественным мерам этого понятия. Когда предполагается специфичное измерение, то используются соответствующие прилагательные.

2.2.3 Формальное определение термина "неопределенность измерения", разработанное для использования в этом *Руководстве* и принятое VIM [6] (VIM, пункт 3.9), следующее:

неопределенность (измерения)
есть параметр, связанный с результатом измерения, который характеризует дисперсию значений, которые могли быть обоснованно приписаны измеряемой величине.

ПРИМЕЧАНИЯ.
1 Параметром может быть, например, стандартное отклонение (или данное кратное ему) или полуширина интервала, имеющего установленный уровень доверия.

2 Неопределенность измерения обычно включает много составляющих. Некоторые из этих составляющих могут быть оценены из статистического распределения результатов рядов измерений и могут характеризоваться экспериментальными стандартными отклонениями. Другие составляющие, которые также могут характеризоваться стандартными отклонениями, оценивают из предполагаемых распределений вероятностей, основанных на опыте или другой информации.
3 Очевидно, что результат измерения является наилучшей оценкой значения измеряемой величины и что все составляющие неопределенности, включая те, которые возникают от систематических эффектов, таких как составляющие, связанные с поправками и эталонами сравнения, вносят вклад в дисперсию.

2.2.4 Определение неопределенности измерения, данное в 2.2.3, является рабочим, которое сфокусировано на результат измерения и его оцененную неопределенность. Однако оно не расходится с другими понятиями неопределенности измерения, такими как:

- мера возможной погрешности оцененного значения измеряемой величины, полученной как результат измерения;
  - оценка, характеризующая диапазон значений, в пределах которого находится истинное значение измеряемой величины (VIM, первое издание, 1984, п. 3.09).

Хотя эти два традиционных понятия справедливы как идеальные, они сосредоточивают внимание на *неизвестные* величины: "погрешность" результата измерения и "истинное значение" измеряемой величины (в противоположность его оцененному значению), соответственно. Тем не менее, независимо от того, какое понятие неопределенности принято, составляющая неопределенности всегда оценивается с использованием тех же самых данных и имеющейся информации (см. также Е.5).

2.3 Термины, специфичные для этого *Руководства*

В основном, термины, которые специально введены для этого *Руководства,* определяются в тексте, когда они впервые вводятся. Однако определения наиболее важных из этих терминов даны здесь для удобства.

ПРИМЕЧАНИЕ - Дальнейшее обсуждение терминов, связанных с приведенными, можно найти следующим образом: для 2.3.2 см. 3.3.3 и 4.2; для 2.3.3 см. 3.3.3 и 4.3; для 2.3.4 см. раздел 5 и уравнения (10) и (13); и для 2.3.5 и 2.3.6 см. раздел 6.

2.3.1 Стандартная неопределенность -
неопределенность результата измерения, выраженная как стандартное отклонение.

2.3.2 Оценка (неопределенности) по типу А-
метод оценивания неопределенности путем статистического анализа рядов наблюдений.

2.3.3 Оценка (неопределенности) по типу В -
метод оценивания неопределенности иным способом, чем статистический анализ рядов наблюдений.

2.3.4 Суммарная стандартная неопределенность -
стандартная неопределенность результата измерения, когда результат получают из значений ряда других величин, равная положительному квадратному корню суммы членов, причем члены являются дисперсиями или ковариациями этих других величин, взвешенными в соответствии с тем, как результат измерения изменяется в зависимости от изменения этих величин.

2.3.5 Расширенная неопределенность -
величина, определяющая интервал вокруг результата измерения, в пределах которого, можно ожидать, находится большая часть распределения значений, которые с достаточным основанием могли быть приписаны измеряемой величине.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Эта часть распределения может рассматриваться как вероятность охвата или уровень доверия для интервала.

2 Установление связи между конкретным уровнем доверия и интервалом, определенным расширенной неопределенностью, требует явных и неявных предположений относительно распределения вероятностей, характеризуемого результатом измерения и его суммарной стандартной неопределенностью. Уровень доверия, который может быть приписан этому интервалу, может быть известен только до той степени, в которой такие предположения могут быть оправданы.

3 Расширенная неопределенность называется общей неопределенностью в параграфе 5 Рекомендаций INC-1 (1980).

2.3.6 Коэффициент охвата -
числовой коэффициент, используемый как множитель суммарной стандартной неопределенности для получения расширенной неопределенности.

ПРИМЕЧАНИЕ - Коэффициент покрытия k обычно находится в диапазоне от 2 до 3.

3 Основные понятия

Дополнительное обсуждение основных понятий можно найти в Приложении D, в котором основное внимание уделено идеям "истинного" значения, погрешности и неопределенности и дается графическое представление этих понятий; и в Приложении E, где исследуется обоснование и статистическая база Рекомендации INC-1 (1980), на которых основано это *Руководство.* В Приложении J дается словарь основных математических символов, используемых в этом *Руководстве.*

3.1 Измерение

3.1.1 Целью **измерения** (B.2.5) является определение **значения** (B.2.2) **измеряемой величины** (B.2.9), т.е. значения **определенной величины** (B.2.1, Примечание 1), которую надо измерить. Поэтому измерение начинается с соответствующей спецификации измеряемой величины, **метода измерения** (B.2.7) и **измерительной процедуры** (B.2.8).

ПРИМЕЧАНИЕ - Термин "истинное значение" (см. Приложение D) не используется в этом *Руководстве* по причинам, указанным в D.3.5; термины "значение измеряемой величины" (или величины) и "истинное значение измеряемой величины" (или величины) рассматриваются как эквивалентные.

3.1.2 Обычно **результат измерения** (B.2.11) является только аппроксимацией или **оценкой** (C.2.26) значения измеряемой величины и, таким образом, будет полным, только когда сопровождается установлением **неопределенности** (B.2.18) этой оценки.

3.1.3 На практике спецификация или определение измеряемой величины зависит от требуемой **точности измерения** (B.2.14). Измеряемую величину следует определять с достаточной полнотой по отношению к требуемой точности, чтобы для всех практических целей, связанных с измерением, ее значение было единственным. Именно в этом смысле данное выражение "значение измеряемой величины" используется в этом *Руководстве.*

ПРИМЕР - Если длину стального стержня с номинальной длиной 1 м нужно определить с точностью до микрометра, то его спецификация должна включать температуру и давление, при которых эта длина определяется. Таким образом, измеряемую величину следует специфицировать, как, например, длина стержня при 25,00 ^{0}C и 101325 Па (плюс любые другие определяющие параметры, которые считают необходимыми, такие как способ, с помощью которого этот стержень поддерживается). Однако если длина должна быть определена только с точностью до миллиметра, то ее спецификация не требует определения температуры или давления или значения любого другого определяющего параметра.

ПРИМЕЧАНИЕ - Неполное определение измеряемой величины может вызвать достаточно большую составляющую неопределенности, которая должна быть включена в оценку неопределенности результата измерения (см. D.1.1, D.3.4 и D.6.2).

3.1.4 Во многих случаях результат измерения определяется на основе рядов наблюдений, полученных при **условиях повторяемости** (B.2.15, Примечание 1).

3.1.5 Предполагается, что изменения в повторных наблюдениях возникают из-за **влияющих величин** (B.2.10), которые могут оказывать влияние на результат измерения и которые невозможно поддерживать полностью постоянными.

3.1.6. Математическая модель измерения, которая преобразует ряд повторных наблюдений в результат измерения, является крайне важной, т.к., кроме наблюдений, она обычно включает различные влияющие величины, которые точно неизвестны. Это отсутствие знания вносит вклад в неопределенность результата измерения наряду с изменениями повторных наблюдений и любой неопределенностью, связанной с самой математической моделью.

3.1.7 Это *Руководство* трактует измеряемую величину как скаляр (единичную величину). Распространение на ряд связанных измеряемых величин, определенных одновременно в том же самом измерении, требует замены скалярной измеряемой величины и ее **дисперсии** (C.2.11, C.2.20, C.3.2) на векторную измеряемую величину и **ковариационную матрицу** (C.3.5). Такая замена рассматривается в этом *Руководстве* только в примерах (см. H.2, H.3 и H.4).

3.2 Погрешности, эффекты и поправки

3.2.1 Обычно измерение обладает рядом несовершенств, которые вызывают **погрешность** (B.2.19) результата измерения. Традиционно погрешность рассматривают как состоящую из двух составляющих, а именно - **случайной** (B.2.20) и **систематической** (B.2.21) составляющей.

ПРИМЕЧАНИЕ - Погрешность - идеализированное понятие, и погрешности не могут быть известны точно.

3.2.2 Случайная погрешность предположительно возникает из непредсказуемых или стохастических временных и пространственных изменений влияющих величин. Эффекты таких изменений, ниже называемые *случайные эффекты*, вызывают изменения измеряемой величины при повторных наблюдениях. Хотя случайная погрешность результата измерения не может быть компенсирована поправкой, ее обычно можно уменьшить, увеличив число наблюдений; ее **математическое ожидание** или **ожидаемое значение** (C.2.9, C.3.1) равняется нулю.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1. Экспериментальное стандартное отклонение среднего арифметического или усредненного значения рядов наблюдений (см. 4.2.3) *не* является случайной погрешностью среднего значения, хотя оно так называется в некоторых публикациях. Это, на самом деле, мера *неопределенности* среднего значения, обусловленной случайными эффектами. Точное значение погрешности среднего значения, возникающей из-за этих эффектов, не может быть известно.

2. В этом *Руководстве* большое внимание уделяется различию терминов "погрешность" и "неопределенность". Они не синонимы и представляют собой совершенно различные понятия; их не следует путать друг с другом или неправильно использовать.

3.2.3 Систематическую погрешность, подобно случайной погрешности, нельзя устранить, но ее также часто можно уменьшить. Если систематическая погрешность возникает в результате известного эффекта влияющей величины на результат измерения, ниже называемого *систематическим эффектом*, то можно определить значение этого эффекта и, если оно значительно по размеру по сравнению с требуемой точностью измерения, то можно внести **поправку** (B.2.23) или **поправочный коэффициент** (B.2.24) для компенсации этого эффекта. Предполагается, что после внесения поправки математическое ожидание или ожидаемое значение погрешности, возникающей от систематического эффекта, равно нулю.

ПРИМЕЧАНИЕ - Неопределенность поправки, вносимой в результат измерения для компенсации систематического эффекта, не является систематической погрешностью, часто называемой смещением, результата измерения, вызванного этим эффектом, как она иногда называется. Это, на самом деле, мера *неопределенности* результата из-за неполного знания требуемого значения поправки. Погрешность, возникающая от неполной компенсации систематического эффекта, не может быть известна точно. Термины "погрешность" и "неопределенность" следует использовать правильно и следить за тем, чтобы не путать их.

3.2.4 Предполагают, что в результат измерения внесены поправки на все известные значимые систематические эффекты и что предприняты все усилия, чтобы узнать такие эффекты.

ПРИМЕР. Поправку, обусловленную конечным значением импеданса вольтметра, используемого для определения разности потенциалов (измеряемая величина) в резисторе с высоким импедансом, вносят для уменьшения систематического эффекта на результат измерения, возникающего в результате эффекта нагружения вольтметра. Однако значения импедансов вольтметра и резистора, которые используются для оценивания значения поправки и получены в результате других измерений, сами неопределенны. Эти неопределенности используют для оценивания составляющей неопределенности определения разности потенциалов, возникающей из-за поправки и, таким образом, из систематического эффекта, обусловленного конечным импедансом вольтметра.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Часто измерительные приборы и системы настраиваются или калибруются с использованием эталонов и стандартных образцов, чтобы исключить систематические эффекты; однако неопределенности, связанные с этими эталонами и стандартными образцами, все же должны учитываться.

2 Случай, в котором не вносится поправка на известный значимый систематический эффект, обсуждается в Примечании к 6.3.1 и F.2.4.5.

3.3 Неопределенность.

3.3.1 Неопределенность результата измерения отражает отсутствие точного знания значения измеряемой величины (см. 2.2). Результат измерения после внесения поправки на известные систематические эффекты все еще является только *оценкой* значения измеряемой величины вследствие неопределенности, возникающей из-за случайных эффектов и неточной поправки результата на систематические эффекты.

ПРИМЕЧАНИЕ - Результат измерения (после внесения поправки) может быть, не зная того, очень близким к значению измеряемой величины (и поэтому иметь пренебрежимо малую погрешность), даже если он может иметь большую неопределенность. Таким образом, неопределенность результата измерения не следует путать с неизвестным остатком погрешности.

3.3.2 На практике существует много возможных источников неопределенности при измерении, включая:

a) неполное определение измеряемой величины;

в) несовершенную реализацию определения измеряемой величины;

c) нерепрезентативную выборку - измеренный образец может не представлять определяемую измеряемую величину;

d) неадекватное знание эффектов от условий окружающей среды, влияющих на измерение, или несовершенное измерение условий окружающей среды;

e) субъективная систематическая погрешность оператора при снятии показаний аналоговых приборов;

f) конечное разрешающая способность прибора или порог чувствительности;

g) неточные значения, приписанные эталонам, используемым для измерения, и стандартным образцам веществ и материалов;

h) неточные значения констант и других параметров, полученных из внешних источников и используемых в алгоритме обработки данных;

i) аппроксимации и предположения, используемые в методе измерения и измерительной процедуре;

j) изменения в повторных наблюдениях измеряемой величины при явно одинаковых условиях.

Эти источники необязательно являются независимыми, и некоторые из источников от а) до i) могут вносить вклад в источник j). Конечно, неизвестный систематический эффект не может быть учтен в оценке неопределенности результата измерения, но он вносит вклад в его погрешность.

3.3.3 Рекомендация INC-1 (1980) Рабочей группы по определению неопределенностей группирует составляющие неопределенностей в две категории в соответствии с методами их оценки: "А" и "В" (см. 0.7, 2.3.2 и 2.3.3). Эти категории относятся к *неопределенности* и не являются заменителями слов "случайная" и "систематическая". Неопределенность от внесения поправки на известный систематический эффект может быть получена в некоторых случаях как оценка по типу А, в то время как в других случаях - как оценка по типу В, также как и неопределенность, характеризующая случайный эффект.

ПРИМЕЧАНИЕ - В некоторых публикациях составляющие неопределенности разделяют на категории "случайной" и "систематической" и связывают с погрешностями, возникающими соответственно из случайных и известных систематических эффектов. Такое разделение составляющих неопределенности может быть двусмысленным при общем применении. Например, "случайная" составляющая неопределенности в одном измерении может стать "систематической" составляющей неопределенности в другом измерении, в котором результат первого измерения используется в качестве входных данных. При разделении на категории методов оценки составляющих неопределенности, а не самих составляющих, такая двусмысленность устраняется. В то же время это не мешает собирать отдельные составляющие, которые были оценены этими двумя различными методами, в указанные группы, чтобы использовать для конкретной цели (см. 3.4.3).

3.3.4 Целью классификации на тип А и тип В является показ двух различных способов оценки составляющих неопределенности, и она используется только для удобства обсуждения; она не предназначена для показа того факта, что существует какое-либо различие в природе этих составляющих, являющихся результатом этих двух типов вычисления. Оба типа оценивания основаны на **распределениях вероятностей** (С.2.3), и составляющие неопределенности, являющиеся результатом использования каждого типа, определяются количественно дисперсией или стандартным отклонением.

3.3.5 Оцененную дисперсию u^2, характеризующую составляющую неопределенности, полученную в результате оценивания по типу А, вычисляют из рядов повторных наблюдений, и она является знакомой статистической оценкой дисперсии s^2 (см. 4.2). Оцененное **стандартное отклонение** (С.2.12, С.2.21, С.3.3) u, положительный квадратный корень из u^2, является, таким образом, $u=s$ и для удобства его иногда называют *стандартной неопределенностью типа А*. Для составляющей неопределенности, полученной из оценивания по типу В, оцениваемую дисперсию u^2

вычисляют, используя имеющиеся данные (см. 4.3), и оцененное стандартное отклонение *u* иногда называют *стандартной неопределенностью типа B*.

Таким образом, стандартную неопределенность типа А получают из **функции плотности вероятностей** (С.2.5), полученной из наблюдаемого **распределения по частости** (С.2.18); в то время как стандартную неопределенность типа В получают из предполагаемой функции плотности вероятностей, основанной на степени уверенности в том, что событие произойдет (эта вероятность часто называется **субъективной вероятностью** [С.2.1)]. Оба эти подхода являются признанными интерпретациями вероятности.

ПРИМЕЧАНИЕ - Оценка составляющей неопределенности по типу В обычно основывается на фонде сравнительно надежной информации (см. 4.3.1).

3.3.6 Стандартная неопределенность результата измерения, когда результат получают из значений ряда других величин, называется *суммарной стандартной неопределенностью* и обозначается как u_c. Она является оцененным стандартным отклонением, связанным с результатом, и равна положительному квадратному корню из суммарной дисперсии, полученной из всех составляющих дисперсии и **ковариации** (С.3.4), однако вычисленная путем использования так называемого в *Руководстве* закона распространения неопределенности (см. раздел 5).

3.3.7 Для удовлетворения требований в некоторых областях промышленности и торговли, а также требований в области здравоохранения и безопасности *расширенную неопределенность U* получают умножением суммарной стандартной неопределенности u_c на *коэффициент охвата k*. Намеченной целью *U* является показ интервала около результата измерения, в пределах которого, можно ожидать, находится большая часть распределения значений, которые могли быть с достаточным основанием приписаны измеряемой величине.

ПРИМЕЧАНИЕ - Коэффициент охвата *k* всегда должен быть указан, чтобы можно было снова получить стандартную неопределенность измеряемой величины для использования ее при вычислении суммарной стандартной неопределенности других результатов измерений, которые могут зависеть от этой величины.

3.4 Практические соображения

3.4.1 Если все величины, от которых зависит результат измерения, изменяются, их неопределенность можно оценить статистическими средствами. Однако так как на практике это редко представляется возможным из-за ограниченного времени и ресурсов, неопределенность результата измерения обычно оценивают, используя математическую модель измерения и закон распространения неопределенности. Таким образом, в данном *Руководстве* подразумевается, что измерение можно моделировать математически до степени, определяемой требуемой точностью измерения.

3.4.2 Поскольку математическая модель может быть неполной, все упомянутые величины следует изменять до самой полной практической степени, чтобы оценивание неопределенности, насколько это возможно, могло быть основано на наблюдаемых данных. Всякий раз, когда это доступно, использование эмпирических моделей измерения, основанных на долговременных количественных данных, и использование эталонов сравнения и контрольных карт, которые могут показать, находится ли измерение под статистическим контролем, должны составлять часть усилий, которые необходимо затратить для получения надежных оценок неопределенности. Математическая модель должна всегда пересматриваться, когда наблюдаемые данные, включая результаты независимых определений той же самой измеряемой величины, показывают, что модель неполна. Хорошо спланированный эксперимент может значительно способствовать повышению надежности оценок неопределенности и является частью искусства проведения измерения.

3.4.3 Для того чтобы решить, нормально ли функционирует измерительная система, экспериментально наблюдаемая изменчивость ее выходных величин, оцененная их наблюдаемыми стандартными отклонениями, часто сравнивают с предсказанным стандартным отклонением, полученным суммированием различных составляющих неопределенности, которые характеризуют измерение. В таких случаях следует рассматривать только те составляющие (независимо от того, получены ли они из оценивания по типу А или типу В), которые могут внести вклад в экспериментально наблюдаемую изменчивость этих выходных величин.

ПРИМЕЧАНИЕ - Такой анализ может быть облегчен собиранием тех составляющих, которые вносят вклад в изменчивость, и тех, которые не вносят вклад, в две отдельные соответствующим образом помеченные группы.

3.4.4 В некоторых случаях нет необходимости включать неопределенность поправки на систематический эффект в оценивание неопределенности результата измерения. Хотя неопределенность уже оценена, ею можно пренебречь, если ее вклад в суммарную стандартную неопределенность результата измерения незначителен. Если значение самой поправки незначительно по сравнению с суммарной стандартной неопределенностью, то ею самой тоже можно пренебречь.

3.4.5 Как часто случается на практике, особенно в области законодательной метрологии, измерительный прибор поверяется сравнением с эталоном и неопределенности, связанные с эталоном и процедурой сравнения, пренебрежимо малы по сравнению с требуемой точностью поверки. Примером может служить использование набора хорошо откалиброванных эталонов массы для поверки шкалы коммерческого прибора. В таких случаях, поскольку составляющие неопределенности достаточно малы, чтобы ими можно было пренебречь, измерение может рассматриваться как определение погрешности поверяемого устройства (см. также F.2.4.2).

3.4.6 Оценка значения измеряемой величины, полученная в результате измерения, иногда выражается в единицах, принятых для эталона, а не в единицах, соответствующих Международной системе единиц физических величин (СИ). В таких случаях значение неопределенности, приписываемое результату измерения, может быть значительно меньше, чем когда результат выражается в соответствующих единицах СИ (в действительности, измеряемая величина была переопределена как отношение значения измеряемой величины к принятой величине эталона).

ПРИМЕР - Зенеровский эталон напряжения высокого качества откалиброван сравнением с эталоном напряжения на эффекте Джозефсона, основанном на принятом значении постоянной Джозефсона, рекомендованном для международного использования МКМВ. Относительная суммарная стандартная неопределенность $u_c(V_s)/V_s$ (см. 5.1.6) калиброванной разности потенциалов V_s зенеровского эталона равна $2 \cdot 10^{-8}$, когда V_s выражается в терминах принятых величин, но $u_c(V_s)/V_s$ равняется $4 \cdot 10^{-7}$, когда V_s выражается в единицах СИ для разности потенциалов V из-за дополнительной неопределенности, связанной со значением постоянной Джозефсона в единицах СИ.

3.4.7 Грубые ошибки при регистрации или анализе данных могут вносить значительную неизвестную погрешность в результат измерения. Большие грубые ошибки обычно можно распознать путем должной проверки данных; небольшие - могут быть замаскированы или даже проявиться в виде случайных изменений. Меры неопределенности не предназначены дать объяснение таким ошибкам.

3.4.8 Хотя это *Руководство* дает схему определения неопределенности, оно не может заменить критическое размышление, интеллектуальную честность и профессиональное мастерство. Оценка неопределенности не является ни рутинной работой, ни чисто математической; она зависит от детального знания природы измеряемой величины и измерения. Поэтому качество и ценность упомянутой неопределенности результата измерения, в конечном счете, зависит от понимания, критического анализа и честности тех, кто участвует в приписывании ее значения.

4 Вычисление стандартной неопределенности

Дополнительное руководство по оцениванию составляющих неопределенности, главным образом практического характера, можно найти в Приложении F.

4.1 Моделирование измерения.

4.1.1 В большинстве случаев измеряемая величина Y не является прямо измеряемой, а зависит от N других измеряемых величин X_1, X_2,..., X_N через функциональную зависимость f:

$$Y = f(X_1, X_2,..., X_N) \qquad (1)$$

ПРИМЕЧАНИЯ.

1. Для экономии обозначений в этом *Руководстве* один и тот же символ используется для обозначения физической величины (измеряемой величины) и случайной переменной (см. 4.2.1), которая представляет возможный результат наблюдения за этой величиной. Когда указывается, что величина на входе X_i имеет определенное распределение вероятностей, то символ используется в последнем смысле; предполагается, что физическая величина сама характеризуется существенно единственным значением (см. 1.2 и 3.1.3).

2. В рядах наблюдений k-тое наблюдаемое значение X_i обозначается как $X_{i,k}$; поэтому, если R обозначает сопротивление резистора, то k-тое наблюдаемое значение сопротивления обозначается как R_k.

3. Оценка X_i (строго говоря, его ожидания) обозначается x_i.

ПРИМЕР - Энергия P (измеряемая величина), рассеиваемая при температуре t терморезистором, имеющим значение R_0 при определенной температуре t_0 и при линейном температурном коэффициенте сопротивления α с разностью потенциалов V, подаваемых на клеммы, зависит от V, R_0, α и t согласно

$$P=f(V,R_0,\alpha,t)=V^2/R_0[(1+\alpha(t-t_0))]$$

ПРИМЕЧАНИЕ - Другие методы измерения P следует моделировать с помощью других математических выражений.

4.1.2 Сами *входные величины* X_1, X_2, ..., X_N, от которых зависит *выходная величина* Y, можно рассматривать как измеряемые величины, и они сами могут зависеть от других величин, включая поправки и поправочные коэффициенты на систематические эффекты, что ведет к сложной функциональной зависимости f, которая никогда не может быть записана точно. Кроме того, f можно определить экспериментально (см. 5.1.4) или может существовать только как алгоритм, который должен быть реализован численно. Функцию f, в том виде как она представлена в этом *Руководстве*, следует интерпретировать в этом более широком смысле, а именно - как функцию, которая содержит каждую величину, включая все поправки и поправочные коэффициенты, которые могут внести значительную составляющую в результат измерения.

Таким образом, если данные показывают, что f не моделирует измерение до степени, налагаемой требуемой точностью результата измерения, то дополнительные входные величины должны быть включены в f для устранения неадекватности (см. 3.4.2). Это может потребовать введения входной величины, чтобы отразить неполное знание явления, которое влияет на измеряемую величину. В примере 4.1.1 дополнительные входные величины могут быть необходимы, чтобы объяснить известное неравномерное распределение температуры по резистору, возможный нелинейный температурный коэффициент сопротивления или возможную зависимость сопротивления от атмосферного давления.

ПРИМЕЧАНИЕ - Тем не менее, уравнение (1) может быть настолько элементарным, как $Y=X_1-X_2$. Оно отражает модели, например, сравнения двух определений одной и той же величины X.

4.1.3 Набор входных величин X_1, X_2, ...,X_N можно разделить на следующие категории:

- величины, чьи значения *и неопределенности* определяются непосредственно в текущем измерении. Эти значения и неопределенности можно получить, например, в результате одного наблюдения, повторных наблюдений или заключения, основанного на опыте, и могут требовать определения поправок в показания прибора и поправок на влияющие величины такие, как окружающая температура, атмосферное давление и влажность;

- величины, чьи значения *и неопределенности* вносятся в измерение из внешних источников, такие как величины, связанные с аттестованными эталонами, стандартными образцами веществ и материалов или стандартными справочными данными.

4.1.4 Оценку измеряемой величины Y, обозначенную y, получают из уравнения (1), используя *входные оценки* $x_1, x_2, ..., x_N$ для значений N величин $X_1, X_2, ..., X_N$. Таким образом, *выходная оценка* y, которая является результатом измерения, выражается следующим образом:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_N). \qquad (2)$$

ПРИМЕЧАНИЕ - В некоторых случаях оценку y можно получить из:

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{1,k}, X_{2,k}, ..., X_{N,k})$$

Таким образом, y берется как среднее арифметическое или как среднее значение (см. 4.2.1) n независимых определений Y_k величины Y; при этом каждое определение имеет одну и ту же неопределенность и каждое основано на полном наборе наблюдаемых значений N входных величин X_i, полученных в то же самое время. Этому способу усреднения вместо: $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N)$, где $\overline{X}_i = (\sum_{k=1}^{n} X_{i,k})/n$ является средним арифметическим отдельных наблюдений $X_{i,k}$, можно отдать предпочтение, когда f является нелинейной функцией входных величин $X_1, X_2, ..., X_N$, но два подхода являются идентичными, если f является линейной функцией от X_i (см. Н.2 и Н.4).

4.1.5 Оцененное стандартное отклонение, связанное с выходной оценкой или с результатом измерения y, называемое *суммарной стандартной неопределенностью* и обозначаемое $u_c(y)$, получают из оцененного стандартного отклонения, связанного с каждой входной оценкой x_i, называемого *стандартной неопределенностью* и обозначаемой $u(x_i)$ (см. 3.3.5 и 3.3.6).

4.1.6 Каждую входную оценку x_i и связанную с ней стандартную неопределенность $u(x_i)$ получают из распределения возможных значений входной величины X_i. Это распределение вероятностей может быть основано на частости, т.е. на рядах наблюдений $X_{i,k}$ величин X_i, или оно может быть *априорным* распределением. Оценивания составляющих стандартной неопределенности по типу А основаны на распределениях частости, в то время как оценивания по типу В базируются на *априорных* распределениях. Необходимо признать, что в обоих случаях распределения являются моделями, которые используются, чтобы представить состояние нашего знания.

4.2 Оценивание стандартной неопределенности по типу А.

4.2.1 В большинстве случаев наилучшая доступная оценка математического ожидания или ожидаемого значения μ_q величины q, изменяющейся случайным образом [**случайная переменная** (С.2.2)], для которой были получены n независимых наблюдений q_k при одинаковых условиях измерения (см. В.2.1.5), является **среднее арифметическое или среднее значение** $\overline{q}$ (С.2.19) из n наблюдений:

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \qquad (3)$$

Таким образом, для входной величины X_i, оцененной из n независимых повторных наблюдений $X_{i,k}$, среднее арифметическое $\overline{X}_i$, полученное из уравнения (3), используется как входная оценка x_i в уравнении (2) для определения результата измерения y; т.е. $x_i = \overline{X}_i$. Те входные оценки, которые не определены из повторных наблюдений, должны быть получены другими методами, такими как те, которые указаны во второй категории п. 4.1.3.

4.2.2 Отдельные наблюдения q_k отличаются по значению из-за случайных изменений влияющих величин или случайных эффектов (см. 3.2.2). Экспериментальную дисперсию наблюдений, которая оценивает дисперсию σ^2 распределения вероятностей q, получают, как:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2 \qquad (4)$$

Эта оценка дисперсии выборки и ее положительный квадратный корень $s(q_k)$, называемый **экспериментальным стандартным отклонением** (B.2.17), характеризует изменчивость наблюдаемых значений q_k или, точнее, их дисперсию относительно среднего значения $\overline{q}$.

4.2.3 Наилучшая оценка $\sigma^2(\overline{q}) = \sigma^2/n$ дисперсии среднего значения выражается, как:

$$s^2(\overline{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \qquad (5)$$

Экспериментальная дисперсия среднего $s^2(\overline{q})$ и **экспериментальное стандартное отклонение среднего значения** $s(\overline{q})$ (B.2.17, Примечание 2), равное положительному квадратному корню из $s^2(\overline{q})$, количественно определяют, насколько хорошо $\overline{q}$ оценивает ожидание μ_k величины q, и также могут быть использованы в качестве меры неопределенности $\overline{q}$.

Таким образом, для входной величины X_i, определенной из n независимых повторных наблюдений $X_{i,k}$, стандартная неопределенность $u(x_i)$ ее оценки $x_i = \overline{X}_i$ есть $u(x_i)=s(\overline{X}_i)$ с $s^2(\overline{X}_i)$, вычисленным согласно уравнению (5). Для удобства $u^2(x_i) = s^2(\overline{X}_i)$ и $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ иногда соответственно называют *дисперсией типа А* и *стандартной неопределенностью типа А*.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1. Число наблюдений n должно быть достаточно большим, чтобы $\overline{q}$ давало надежную оценку ожидания μ_q случайной переменной q и чтобы $s^2(\overline{q})$ обеспечивало надежную оценку дисперсии $\sigma^2(\overline{q}) = \sigma^2/n$ (см. Примечание к 4.3.2,). При построении доверительных интервалов (см. 6.2.2) следует принимать во внимание различие между $s^2(\overline{q})$ и $\sigma^2(\overline{q})$. В этом случае, если распределение вероятностей q является нормальным распределением (см. 4.3.4), то разница учитывается посредством t - распределения (см. G.3.2).

2. Хотя дисперсия $s^2(\overline{q})$ является более фундаментальной величиной, на практике стандартное отклонение $s(\overline{q})$ является более удобным, т.к. оно имеет ту же самую размерность, что и q, и более легко понимаемое значение, чем значение дисперсии.

4.2.4 Для хорошо определенного измерения, находящегося под статистическим контролем, для метода может иметься суммарная или комбинированная оценка дисперсии s^2_p (или суммарное экспериментальное стандартное отклонение s_p), которые характеризуют измерение. В таких случаях, когда значение измеряемой величины q определяется из n независимых наблюдений, экспериментальная дисперсия среднего арифметического значения наблюдений $\overline{q}$ лучше оценивается, как s^2_p/n, чем $s^2(\overline{q})/n$, и стандартная неопределенность есть $u = s_p/\sqrt{n}$ (см. также Примечание к H.3.6).

4.2.5 Часто оценку x_i входной величины X_i получают из кривой, которая хорошо соответствует экспериментальным данным, методом наименьших квадратов. Оцененные дисперсии и результирующие стандартные неопределенности аппроксимированных параметров, характеризующих кривую, и любые предсказанные точки обычно могут быть легко вычислены с помощью хорошо известных статистических методов (см. H.3 и [8]).

4.2.6 Степени свободы (C.2.31) ν_i для $u(x_i)$ (см. G.3), равные n-1 в простом случае, где $x_i=\overline{X}_i$ и $u(x_i) = s(X_i)$, вычисляются из n независимых наблюдений, как в 4.2.1 и 4.2.3, всегда следует давать при документальном подтверждении оценок составляющих неопределенности по типу А.

4.2.7 Если случайные изменения в наблюдениях входной величины коррелированы, например, по времени, то среднее значение и экспериментальное стандартное отклонение среднего, данные в 4.2.1 и 4.2.3, могут быть неподходящими **оценивателями** (C.2.25) желаемых **статистик** (C.2.23). В таких случаях результаты наблюдений следует анализировать, используя статистические методы, специально предназначенные для обработки рядов коррелированных случайно изменяющихся измерений.

ПРИМЕЧАНИЕ - Такие специальные методы используются для обработки результатов измерений эталонов частоты. Однако возможно, что по мере перехода от краткосрочных измерений к длительным измерениям других метрологических величин предположение о некоррелированности случайных вариаций может уже не иметь силы, и могут также использоваться специальные методы (см. [9], например, для детального обсуждения дисперсии Аллана).

4.2.8 Обсуждение оценивания стандартной неопределенности по типу А в 4.2.1-4.2.7 не означает, что оно является исчерпывающим; существует много ситуаций, некоторые - довольно сложные, которые можно рассматривать с помощью статистических методов. Важным примером является использование калибровочных расчетов, часто основанных на методе наименьших квадратов, для оценки неопределенностей, возникающих как от кратковременных, так и длительных случайных изменений результатов сличений материальных артефактов с неизвестными значениями, таких как плоскопараллельные концевые меры длины и эталоны массы, с эталонами сравнения, значения которых известны. В таких сравнительно простых измерительных ситуациях составляющие неопределенности часто поддаются оцениванию статистическим анализом данных, полученных путем использования расчетов, состоящих из гнездовых последовательностей измерений измеряемой величины для ряда различных значений величин, от которых она зависит - так называемый анализ дисперсий (см. Н5).

ПРИМЕЧАНИЕ - На более низких уровнях поверочной схемы, когда часто предполагается, что данные эталонов сравнения точно известны, т.к. они были откалиброваны национальными лабораториями первичных эталонов, неопределенность результата калибровки может включать только одну стандартную неопределенность типа А, оцененную из сгруппированного экспериментального стандартного отклонения, которое характеризует измерение.

4.3 Оценивание стандартной неопределенности по типу В

4.3.1 Для оценки x_i входной величины X_i, которая не была получена в результате повторных наблюдений, связанные с ними оцененная дисперсия $u^2(x_i)$ или стандартная неопределенность $u(x_i)$ определяются на базе научного суждения, основанного на всей доступной информации о возможной изменчивости X_i. Фонд информации может включать:

- данные предварительных измерений,
- данные, полученные в результате опыта, или общие знания о поведении и свойствах соответствующих материалов и приборов,
- спецификации изготовителя,
- данные, которые приводятся в свидетельствах о калибровке и в других сертификатах,
- неопределенности, приписываемые справочным данным, взятым из справочников.

Для удобства $u^2(x_i)$ и $u(x_i)$, оцененные таким способом, иногда называются соответственно *дисперсией типа В* и *стандартной неопределенностью типа В.*

ПРИМЕЧАНИЕ - Когда x_i получено из *априорного* распределения, связанная с ним дисперсия правильно должна записываться, как $u^2(X_i)$, но для простоты в этом *Руководстве* используются $u^2(x_i)$ и $u(x_i)$.

4.3.2 Правильное использование фонда доступной информации для оценивания стандартной неопределенности по типу В требует интуиции, основанной на опыте и общих знаниях, и является мастерством, которое приходит с практикой. Следует признать, что оценка стандартной неопределенности по типу В может быть такой же надежной, как и оценка по типу А, особенно в измерительной ситуации, когда оценивание по типу А основывается на небольшом числе статистически независимых наблюдений.

ПРИМЕЧАНИЕ - Если распределение вероятностей q в Примечании 1 к 4.2.3 является нормальным, тогда $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$ - стандартное отклонение $s(\overline{q})$ по отношению к $\sigma(\overline{q})$ - приблизительно равно $[2(n-1)]^{-1/2}$ Таким образом, приняв $\sigma[s(\overline{q})]$ в качестве неопределенности $s(\overline{q})$, для n=10 наблюдений относительная неопределенность $s(\overline{q})$ составляет 24 процента, в то время как для n=50 наблюдений она составит 10 процентов (дополнительные значения даны в таблице E1 Приложения E).

4.3.3 Если оценка x_i берется из спецификации изготовителя, свидетельства о поверке, справочника или другого источника, и ее неопределенность дается как некоторое кратное стандартного отклонения, то стандартную неопределенность $u(x_i)$ можно принять равной указанному значению, деленному на множитель, и оцененная дисперсия $u^2(x_i)$ равна квадрату этого частного.

ПРИМЕР.
Свидетельство о калибровке утверждает, что масса m_S эталона из нержавеющей стали с номинальным значением 1 килограмм составляет 1000,000325 г и что "неопределенность этого значения равняется 240 мкг на уровне трех стандартных отклонений". Тогда стандартная неопределенность эталона массы есть просто $u(m_S)$=(240 мкг)/3=80 мкг. Это соответствует относительной стандартной неопределенности $u(m_S)/m_S$=80*10^{-9} (см. 5.1.6). Оцененная дисперсия есть $u^2(m_S)$ = (80 мкг)^2 = 6,4*10^{-9} г^2.

ПРИМЕЧАНИЕ - Во многих случаях мало или совсем отсутствует информация об отдельных составляющих, из которых указанная неопределенность была получена. Это обычно не имеет значения, если придерживаться данного *Руководства*, т.к. все стандартные неопределенности трактуются одним и тем же способом при вычислении суммарной стандартной неопределенности результата измерения (см. раздел 5).

4.3.4 Приведенная неопределенность величины x_i необязательно дается в виде кратного стандартного отклонения, как в 4.3.3. Вместо этого можно встретить, что упомянутая неопределенность определяет интервал, имеющий 90, 95 или 99 процентный уровень доверия (см. 6.2.2). Если не указано другого, то можно предположить, что использовалось **нормальное распределение** (C.2.14) для вычисления упомянутой неопределенности, и стандартную неопределенность для x_i, получают делением приведенной неопределенности на соответствующий коэффициент для нормального распределения. Коэффициенты, соответствующие вышеуказанным трем уровням доверия, следующие: 1,64; 1,96 и 2,58 (см. также таблицу G.1 в Приложении G).

ПРИМЕЧАНИЕ - Не было бы необходимости в таком предположении, если неопределенность была бы дана в соответствии с рекомендациями данного *Руководства*, рассматривающими сообщение о неопределенности, которые подчеркивают, что всегда должен быть указан использованный коэффициент охвата (см. 7.2.3).

ПРИМЕР - Свидетельство о калибровке утверждает, что сопротивление эталонного резистора R_S с номинальным значением десять Ом есть 10,000742 Ом ± 129 мкОм при 23 ^{0}C и что "упомянутая неопределенность 129 мкОм определяет интервал, имеющий 99 процентный уровень доверия". Стандартную неопределенность резистора можно принять как $u(R_S)$ = (129 мкОм)/2,58=50 мкОм, что соответствует относительной стандартной неопределенности $u(R_s)/R_s$=5,0*10^{-6} (см. 5.1.6). Оцененная дисперсия есть $u^2(R_s)$ = (50 мкОм)^2 = = 2,5*10^{-9} Ом^2.

4.3.5 Рассмотрим случай, когда, основываясь на доступной информации, можно утверждать, что "существует вероятность пятьдесят - на - пятьдесят того, что значение входной величины X_i находится в интервале от a_- до a_+" (другими словами, вероятность того, что X_i находится в этом интервале, составляет 0,5 или 50 процентов). Если можно предположить, что распределение возможных значений X_i приблизительно нормальное, то наилучшую оценку x_i величины X_i можно принять как среднюю точку этого интервала. Далее, если полуширина этого интервала обозначается как $a=(a_+ - a_-)/2$, то можно принять $u(x_i) = 1,48a$, т.к. для нормального распределения с ожиданием μ и стандартным отклонением σ интервал $\mu \pm \sigma/1,48$ охватывает приблизительно 50 процентов распределения.

ПРИМЕР - Станочник, определяющий размеры детали, оценивает, что ее длина находится, с вероятностью 0,5, в интервале от 10,07 мм до 10,15 мм и утверждает, что l=(10,11±0,04) мм, имея в виду, что ±0,04 мм определяет интервал, имеющий 50 процентный уровень доверия.

Тогда a=0,04 мм и, предположив нормальное распределение для возможных значений l, стандартная неопределенность длины составляет $u(l)$=1,48*0,04 мм=0,06 мм и оцененная дисперсия $u^2(l)$=(1,48*0,04 мм)^2=3,5*10^{-3} мм^2.

4.3.6 Рассмотрим случай, подобный 4.3.5, но где, основываясь на имеющейся информации, можно утверждать, что "есть приблизительно 2 из 3 шансов, что значение X_i находится в интервале от a_- до a_+" (другими словами, вероятность того, что X_i находится в этом интервале, составляет около 0,67). Тогда с достаточным основанием можно принять $u(x_i)=a$, т.к. для нормального распределения с ожиданием μ и стандартным отклонением σ интервал $\mu \pm \sigma$ охватывает около 68,3 процента распределения.

ПРИМЕЧАНИЕ - Это дало бы значению $u(x_i)$ значительно большую значимость, чем та, которая, очевидно, оправдана, если бы надо было использовать действительно нормальное отклонение 0,96742, соответствующее вероятности p=2/3, т.е. если надо было бы записать $u(x_i) = a$ / 0,96742=1,033a.

4.3.7 В других случаях можно оценить только границы (верхний и нижний пределы) для X_i, в частности, утверждать, что "вероятность того, что значение X_i находится в интервале от a_- до a_+ для всех практических целей, равна единице и вероятность того, что X_i находится за пределами этого интервала существенно равна нулю". Если нет *конкретных сведений* о возможных значениях X_i внутри интервала, то можно только предположить, что с одинаковой вероятностью X_i может находиться в любом месте в его пределах (равномерное или прямоугольное распределение возможных значений - см. 4.4.5 и рис.2а). Тогда x_i, ожидание или ожидаемое значение X_i является средней точкой интервала, $x_i = (a_+ + a_-)/2$, с соответствующей дисперсией

$$u^2(x_i)=(a_+ - a_-)^2/12 \qquad (6)$$

Если разность между границами $a_+ - a_-$ обозначить как $2a$, тогда уравнение (6) становится

$$u^2(x_i)=a^2/3 \qquad (7)$$

ПРИМЕЧАНИЕ - Когда составляющая неопределенности, полученная таким образом, дает значительный вклад в неопределенность результата измерения, имеет смысл получить дополнительные данные для ее дальнейшего оценивания.

ПРИМЕРЫ.

1. Справочник дает значение температурного коэффициента линейного расширения чистой меди при 20 ^{0}C α_{20}(Cu)=16,52*10^{-6} ^{0}C^{-1} и просто утверждает, что "погрешность этого значения не должна превышать 0,40*10^{-6} ^{0}C^{-1}". Основываясь на такой ограниченной информации, можно только предположить, что значение α_{20}(Cu) находится с равной вероятностью в интервале от 16,12*10^{-6} ^{0}C^{-1} до 16,92*10^{-6} ^{0}C^{-1} и что очень маловероятно, чтобы α_{20}(Cu) находится за пределами этого интервала. Дисперсия этого симметричного прямоугольного распределения возможных значений α_{20} (Cu) с полушириной a=0,40*10^{-6} ^{0}C^{-1} тогда есть, из уравнения (7), $u^2(\alpha_{20})$=(0,40*10^{-6} ^{0}C^{-1})^2 /3=53,3*10^{-15} ^{0}C^{-2} и стандартная неопределенность есть $u(\alpha_{20})$=(0,40*10^{-6} ^{0}C^{-1})/$\sqrt{3}$=0,23*10^{-6} ^{0}C^{-1}.

2. В спецификациях изготовителя для цифрового вольтметра указывается, что "в промежутке от года до двух лет после калибровки прибора его погрешность на диапазоне 1 В равняется показанию, умноженному на 14*10^{-6} плюс диапазон, умноженный на 2*10^{-6}". Предположим, что прибор используется спустя 20 месяцев после калибровки для измерения разности потенциалов V на его диапазоне 1 В и установлено, что среднее арифметическое ряда независимых повторных наблюдений V равняется $\overline{V}$ = 0,928571 В при стандартной неопределенности u($\overline{V}$)=12 мкВ, вычисленной по типу А. Оценку по типу В стандартной неопределенности, связанную со спецификациями изготовителя, можно получить в предположении, что указанная погрешность дает симметричные границы аддитивной поправки к$\overline{V}$, $\Delta\overline{V}$ ожидания, равного нулю, и при равной вероятности нахождения в любом месте в пределах границ. Полуширина a симметричного прямоугольного распределения возможных значений $\overline{V}$ тогда есть a=(14*10^{-6})* *(0,928571 В)+(2*10^{-6})*(1 В)=15 мкВ и из уравнения (7) $u^2(\Delta\overline{V}$)=75 мкВ^2 и $u(\Delta\overline{V}$)=8,7 мкВ. Оценка значения измеряемой величины V, для простоты обозначенная тем же самым символом V, выражается как $V=\overline{V}+\Delta\overline{V}$=0,928571 В. Суммарную стандартную неопределенность этой оценки получают суммированием стандартной

неопределенности V, равной 12 мкВ, вычисленной по типу А, со стандартной неопределенностью $\Delta\overline{V}$, равной 8,7 мкВ, вычисленной по типу В. Общий метод суммирования составляющих стандартной неопределенности дан в разделе 5, а этот конкретный пример рассмотрен в 5.1.5.

4.3.8 В 4.3.7 верхняя и нижняя границы a_+ и a_- для входной величины X_i могут быть симметричными относительно их лучшей оценки x_i; в частности, если нижняя граница записана в виде $a_- = x_i - b_-$, а верхняя граница в виде $a_- = x_i + b_+$, тогда $b_- \neq b_+$. Так как в этом случае x_i (предполагаемое как ожидание X_i) не находится в центре интервала от a_- до a_+, то распределение вероятностей X_i не может быть равномерным по всему интервалу. Однако может не быть достаточной доступной информации, чтобы выбрать соответствующее распределение; различные модели приведут к различным выражениям для дисперсии. При отсутствии такой информации самой простой аппроксимацией является

$$u^2(x_i)=(b_+ + b_-)^2/12=(a_+-a_-)^2/12, \quad (8)$$

которая является дисперсией прямоугольного распределения при полной ширине $b_+ + b_-$ (асимметричные распределения рассматриваются также в F.2.4.4 и G.5.3).

ПРИМЕР - Если в примере 1, описанном в 4.3.7, значение коэффициента в справочнике дается как $\alpha_{20}(Cu)=16{,}52*10^{-6}\ {}^0C^{-1}$ и утверждается, что "наименьшим возможным значением является $16{,}40*10^{-6}\ {}^0C^{-1}$, а наибольшим возможным значением- $16{,}92*10^{-6}\ {}^0C^{-1}$, тогда $b_-=0{,}12*10^{-6}\ {}^0C^{-1}$, $b_+=0{,}40*10^{-6}\ {}^0C^{-1}$ и из уравнения (8) $u(\alpha_{20})=$ $=0{,}15*10^{-6}\ {}^0C^{-1}$.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1. Во многих практических измерительных ситуациях, где границы асимметричны, может быть целесообразным вносить поправку в оценку x_i величиной $(b_+-b_-)/2$ таким образом, чтобы новая оценка x_i значения X_i находилась бы посредине границ $x'_i=(a_-+a_+)/2$. Это сводит ситуацию к случаю, описанному в 4.3.7, при новых значениях $в'_+=в'_-=(в_+ + в_-)/2=(a_+-a_-)/2=a$.

2. В случае асимметрии функция плотности вероятностей может быть показана, как $p(X_i)=A\exp[-\lambda(X_i-x_i)]$, основываясь на принципе максимальной энтропии, при $A=[в_-\exp(\lambda в_-)+$ $+в_+\exp(-\lambda в_+)]$ и $\lambda=\{\exp[\lambda(в_-+в_+)]-1\}/[b_-\exp[\lambda(b_-+$ $+b_+)]+b_+\}$. Это дает дисперсию $u^2(x_i)= b_+b_- - (b_+-b_-)/\lambda$; для $b_+>b_-$, $\lambda>0$ и для $b_+<b_-$, $\lambda<0$.

4.3.9 В 4.3.7 из-за отсутствия конкретных данных о возможных значениях X_i в пределах его оцененных границ от a_- до a_+ можно только предположить, что с одинаковой вероятностью X_i может принять любое значение в пределах этих границ и что существует нулевая вероятность того, что это значение будет за пределами указанных границ. Такие разрывы ступенчатой функции в распределении вероятностей являются часто нефизическими. Во многих случаях более реалистично ожидать, что значения возле границ гораздо менее вероятны, чем те, которые находятся возле центра. Тогда целесообразно заменить симметричное прямоугольное распределение симметричным трапецеидальным распределением, имеющим одинаковые наклонные стороны (равнобедренная трапеция), с шириной основания $a_+-a_-=2a$ и с шириной верхней части $2a\beta$, где $0 \le \beta \le 1$. Когда $\beta \to 1$, это трапецеидальное распределение приближается к прямоугольному, описанному в разделе 4.3.7, в то время как для $\beta=0$ это - треугольное распределение (см. 4.4.6 и рис. 2в). Предположив такое трапецеидальное распределение для X_i, можно найти, что ожидание X_i есть $x_i=(a_-+a_+)/2$, а связанная с ней дисперсия есть

$$u^2(x_i)=a^2(1+\beta^2)/6, \quad (9а)$$

которая для треугольного распределения, $\beta=0$, становится:

$$u^2(x_i)=a^2/6. \quad (9в)$$

ПРИМЕЧАНИЯ.

1. Для нормального распределения с ожиданием μ и стандартной неопределенностью σ интервал $\mu\pm3\sigma$ покрывает приблизительно 99,73 процента распределения. Таким образом, если верхняя и нижняя границы a_+ и a_- определяют 99,73 процента, а не 100 процентные пределы, а также если можно предположить, что X_i распределена приблизительно нормально, а не так, как описано в 4.3.7, где нет конкретных данных о нахождении X_i между границами, тогда $u^2(x_i)=a/9$. Для сравнения: дисперсия симметричного прямоугольного распределения

полушириной a есть $a^2/3$ [уравнение (7)], а дисперсия симметричного треугольного распределения полуширины a есть $a^2/6$ [уравнение (9в)]. Значения дисперсий этих трех распределений удивительно схожи, несмотря на большую разницу в количестве информации, необходимой для их обоснования.

2. Трапецеидальное распределение эквивалентно свертыванию двух прямоугольных распределений [10], одного с полушириной a_1, равной средней полуширине трапеции $a_1=a(1+\beta)/2$, другого с полушириной a_2, равной средней ширине одной из треугольных частей трапеции, $a_2=a(1-\beta)/2$. Дисперсия распределения есть $u^2= a_1^2/3+a_2^2/3$. Свернутое распределение можно интерпретировать как прямоугольное распределение, ширина которого $2a_1$, сама имеет неопределенность, представленную прямоугольным распределением с шириной $2a_2$, и моделирует тот факт, что границы на входную величину точно неизвестны. Но даже если a_2 составляет вплоть до 30 процентов от a_1, то u превышает $a_1/\sqrt{3}$ меньше, чем на 5 процентов.

4.3.10 Важно не вести "повторного счета" составляющих неопределенности. Если составляющая неопределенности, возникающая от конкретного эффекта, получена оцениванием по типу В, то она должна быть включена как независимая составляющая неопределенности в вычисление суммарной стандартной неопределенности результата измерения только до той степени, чтобы эффект не вносил вклад в проявляющуюся изменчивость наблюдений. Это объясняется тем, что неопределенность, обусловленная той частью эффекта, которая вносит вклад в наблюдаемую изменчивость, уже включена в составляющую неопределенности, полученную из статистического анализа наблюдений.

4.3.11 Обсуждение оценивания стандартной неопределенности по типу В в 4.3.3-4.3.9 рассматривается как только качественное. В дальнейшем оценивания неопределенности должны быть основаны на количественных данных в максимально возможной степени, как подчеркивается в 3.4.1 и 3.4.2.

4.4 Графическая иллюстрация оценивания стандартной неопределенности.

4.4.1 На рис. 1 графически представлена оценка значения входной величины X_i и оценивание неопределенности этой оценки из неизвестного распределения возможных измеренных значений X_i или распределения вероятностей X_i, выборку которого получают путем повторных наблюдений.

4.4.2 На рис. 1а предполагают, что входной величиной X_i является температура t, что ее неизвестным распределением является нормальное распределение с ожиданием μ_t=100 ^{0}С и стандартным отклонением σ=1,5 ^{0}С. Тогда ее функция плотности вероятностей есть (см. С.2.14)

$$p(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}*\exp[-(t-\mu_t)^2/2\sigma^2].$$

ПРИМЕЧАНИЕ - Определение функции плотности вероятностей $p(z)$ требует, чтобы она удовлетворяла условию $\int p(z)dz=1$.

4.4.3 На рис. 1в показана гистограмма n=20 повторных наблюдений t_k температуры t, которая, как предполагается, была взята случайно из распределения, показанного на рис. 1а. Для получения гистограммы 20 наблюдений или выборок, значения которых даны в таблице 1, группировались в интервалы шириной 1 ^{0}С (подготовка гистограммы, конечно, не требуется для статистического анализа данных).

Среднее арифметическое или среднее значение $\bar{t}$ из n = 20 наблюдений, вычисленное согласно уравнению (3), равняется: $\bar{t}$ =100,145 ^{0}С≅100,14 ^{0}С, и предполагается, что оно является лучшей оценкой ожидания μ_t значения t, основанной на имеющихся данных. Экспериментальное стандартное отклонение $s(t_k)$, вычисленное из уравнения (4), есть $s(t_k)$=1,489 ^{0}С=1,49 ^{0}С, и экспериментальное стандартное отклонение среднего $s(\bar{t})$, вычисленное из уравнения (5), которое является стандартной неопределенностью $u(\bar{t})$ среднего значения $\bar{t}$, есть $u(\bar{t})=s(\bar{t})=s(t_k)/\sqrt{20}$=0,333 ^{0}С≅0,33 ^{0}С (вероятно, что для дальнейших расчетов все эти цифры желательно сохранить).

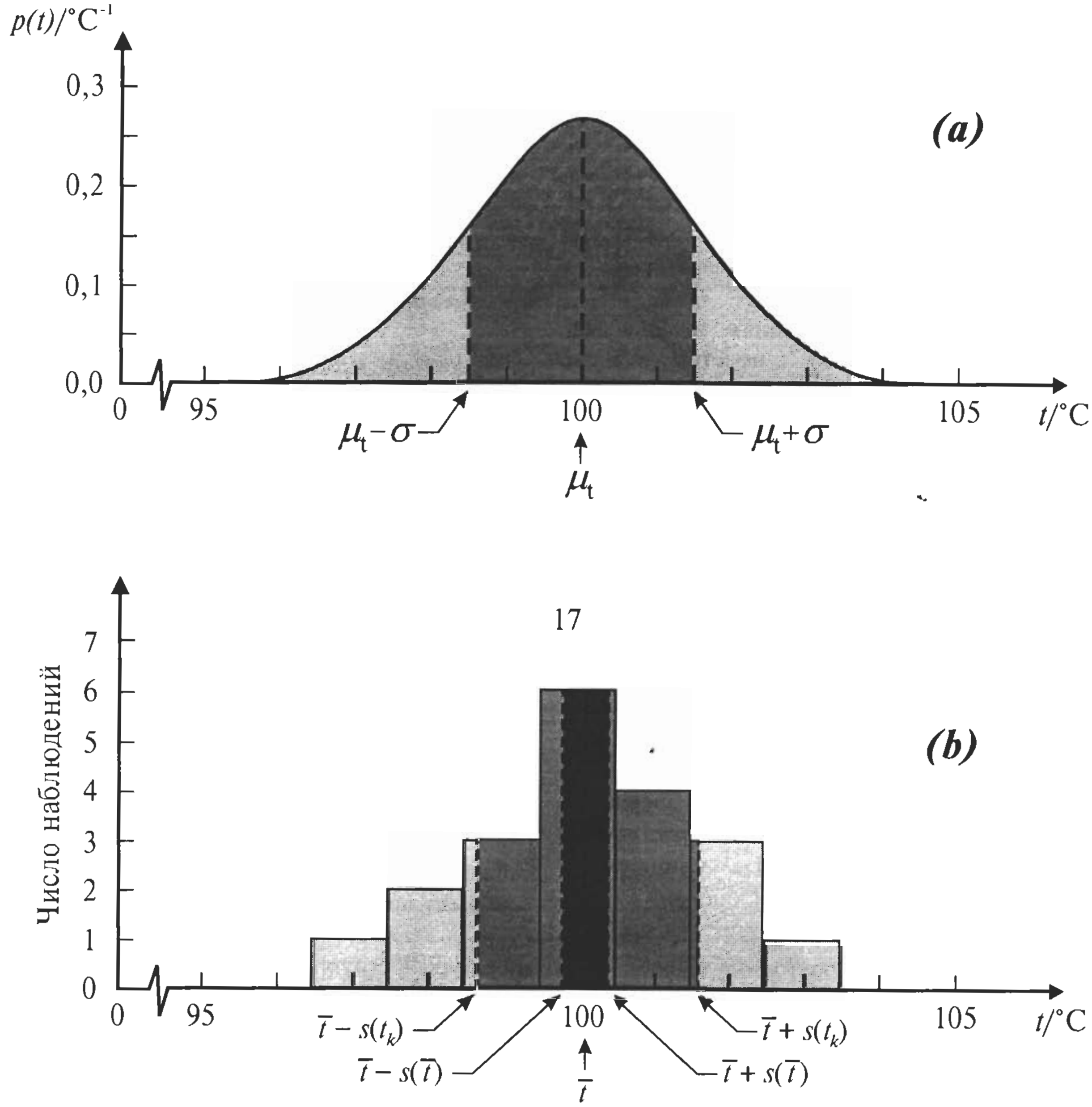

Рисунок 1. Графическая иллюстрация оценивания стандартной неопределенности входной величины из повторных наблюдений

ПРИМЕЧАНИЕ - Хотя данные в таблице 1 являются правдоподобными, учитывая широкое использование цифровых электронных термометров с высоким разрешением, они приводятся в целях иллюстрации и не обязательно их следует истолковывать как описывающие реальное измерение.

4.4.4 На рис. 2 графически показаны оценка значения входной величины X_i и оценивание неопределенности этой оценки из *априорного* распределения возможных значений X_i или распределения вероятностей X_i, основанной на всей имеющейся информации. Для обоих из показанных случаев снова предполагают, что входной величиной является температура t.

4.4.5 Для случая, показанного на рис. 2а, предполагалось, что имеется мало информации о входной величине t и все, что можно сделать, так это предположить, что t описывается симметричным прямоугольным *априорным* распределением вероятностей с нижней границей a_-=96 ^{0}С и с верхней границей a_+=104 ^{0}С и, таким образом, полушириной $a=(a_+-a_-)/2$=4 ^{0}С (см. 4.3.7). Тогда функция плотности вероятностей величины t есть

$$p(t)=1/2a,\ a_-\le t\le a_+,$$
$p(t)$=0 в противном случае.

Как указано в 4.3.7, наилучшей оценкой t является ее ожидание μ_t =$(a_++a_-)/2$=100 ^{0}С, что вытекает из С.3.1. Стандартная неопределенность этой оценки есть $u(\mu_t)=a/\sqrt{3}\cong 2{,}3$ ^{0}С, что вытекает из С.3.2 [см. уравнение (7)].

4.4.6 Для случая, показанного на рис. 2b, предполагается, что имеющаяся информация, касающаяся t, менее ограничена и что t можно описать симметричным треугольным *априорным* распределением вероятности при той же самой нижней границе a_-=96 ^{0}С и той же самой верхней границе a_+=104 ^{0}С и, таким образом, той же полуширине $a=(a_+-a_-)/2$=4 ^{0}С, как и в 4.4.5 (см. 4.3.9). Тогда функция плотности вероятностей величины t есть

$$p(t)=(t-a_-)/a^2,\ a_-\le t\le (a_++a_-)/2,$$
$$p(t)=(a_+-t)/a^2,\ (a_++a_-)/2\le t\le a_+,$$
$p(t)$=0 в противном случае.

Как указано в 4.3.9, ожидание величины t есть μ_t =$(a_++a_-)/2$=100 ^{0}С, что вытекает из С.3.1. Стандартная неопределенность этой оценки есть $u(\mu_t)=a/\sqrt{6}$=1,6 ^{0}С, что следует из С.3.2 [см. уравнение (9b)].

Это последнее значение $u(\mu_t)$=1,6 ^{0}С можно сравнить с $u(\mu_t)$=2,3 ^{0}С, полученным в 4.4.5 из прямоугольного распределения с той же самой шириной 8 ^{0}С; из нормального распределения с σ =-1,5 ^{0}С из рис. 1а, чья ширина от -2,58σ до +2,58σ , включающая 99 процентов распределения, равна примерно 8 ^{0}С; и с $u(\bar{t})$=0,33 ^{0}С, полученной в 4.4.3 из 20 наблюдений, которые, как предполагалось, были взяты случайно из того же самого нормального распределения.

Таблица 1 - Двадцать повторных наблюдений температуры t, сгруппированных в интервалы 1 ^{0}С

Интервал $t_1\le t<t_2$		Температура t, ^{0}С
t_1, ^{0}С	t_2, ^{0}С	
94,5	95,5	-
95,5	96,5	-
96,5	97,5	96,90
97,5	98,5	98,18; 98,25
98,5	99,5	98,61; 99,03; 99,49
99,5	100,5	99,56; 99,74; 99,89; 100,07; 100,33; 100,42
100,5	101,5	100,68; 100,95; 101,11; 101,20
101,5	102,5	101,57; 101,84; 102,36
102,5	103,5	102,72
103,5	104,5	-
104,5	105,5	-

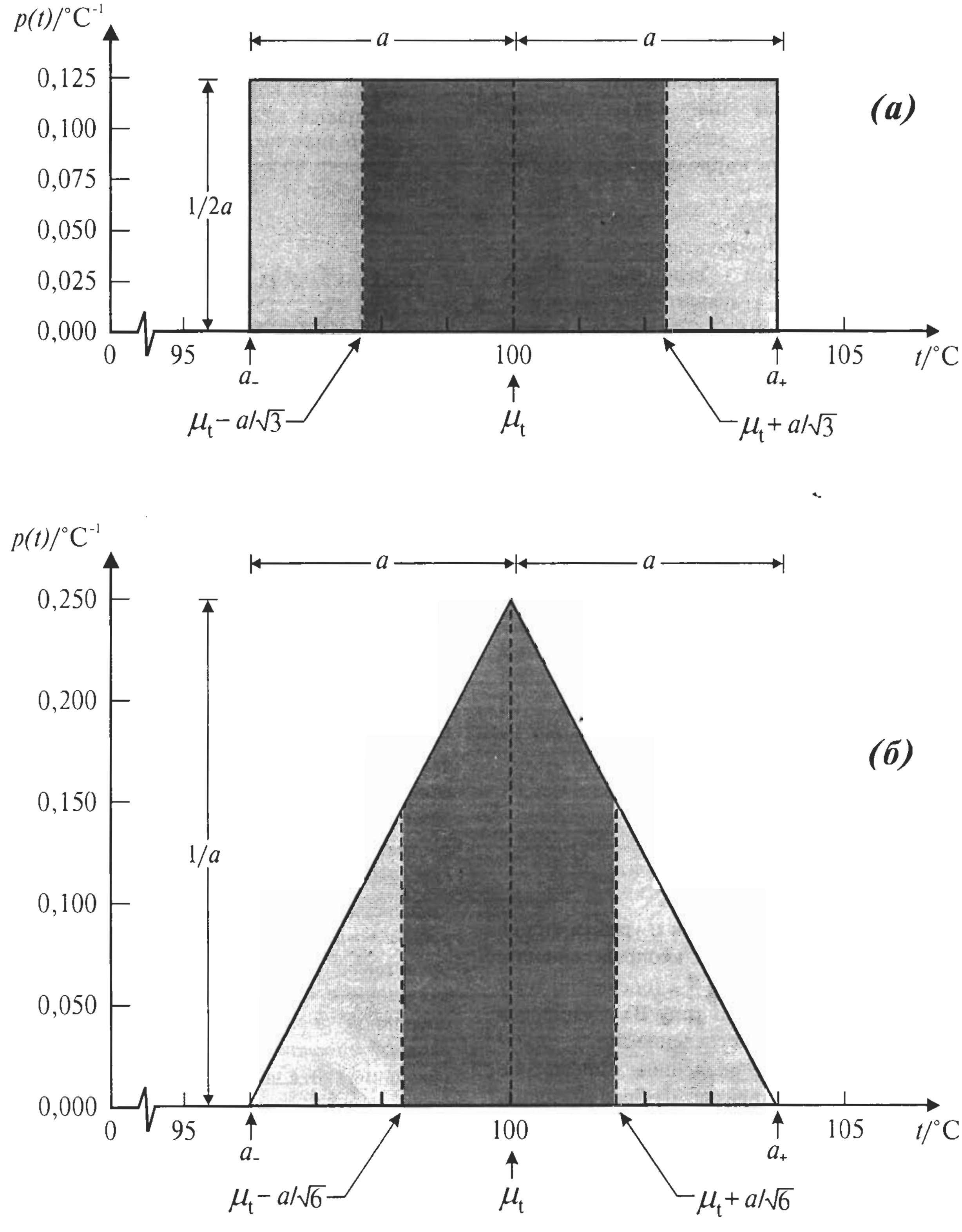

Рисунок 2. Графическая иллюстрация оценивания стандартной неопределенности входной величины из априорного распределения

5 Определение суммарной стандартной неопределенности.

5.1 Некоррелированные входные величины.

Этот подраздел рассматривает случай, когда все входные величины **независимы** (С.3.7). Случай, когда две или более входные величины связаны между собой, т.е. взаимозависимы или **коррелированы** (С.2.8), обсуждается в 5.2.

5.1.1 Стандартная неопределенность y, где y - оценка измеряемой величины Y и, следовательно, результат измерения, получается путем соответствующего суммирования стандартных неопределенностей входных оценок x_1, x_2,..., x_N (см.4.1). Эта *суммарная стандартная неопределенность* оценки y обозначается как $u_c(y)$.

ПРИМЕЧАНИЕ.
По причинам, которые подобны указанным в Примечании к 4.3.1, символы $u_c(y)$ и $u_c^2(y)$ используются во всех случаях.

5.1.2 Суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$ представляет собой положительный квадратный корень из суммарной дисперсии $u_c^2(y)$, полученной из формулы:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i), \qquad (10)$$

где f - функция, приведенная в уравнении (1), каждая $u(x_i)$ - стандартная неопределенность, оцененная, как описано в 4.2 (оценка по типу А) или в 4.3 (оценка по типу В). Суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$ представляет собой оцененное стандартное отклонение и характеризует разброс значений, которые могут быть с достаточным основанием приписаны измеряемой величине Y (см. 2.2.3).

Уравнение (10) и его эквивалент для коррелированных входных величин - уравнение (13), оба из которых базируются на аппроксимации $Y=f(X_1, X_2,..., X_N)$ рядом Тейлора первого порядка, выражают *закон распространения неопределенности* в терминах данного *Руководства* (см. Е.3.1 и Е.3.2).

ПРИМЕЧАНИЕ.
При значительной нелинейности f члены более высокого порядка в разложении в ряд Тейлора должны быть включены в выражение для $u_c^2(y)$, уравнение (10). Когда распределение каждого X_i располагается симметрично относительно его среднего значения, самыми важными членами следующего более высокого порядка, которые надо добавить к членам уравнения (10), являются:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right) u^2(x_i) u^2(x_j)$$

Смотри Н.1 в качестве примера ситуации, где необходимо рассмотреть вклад членов более высокого порядка в $u_c^2(y)$.

5.1.3 Частные производные $\partial f / \partial x_i$ равны $\partial f / \partial X_i$, оцененным как $X_i=x_i$ (см. Примечание 1 ниже). Эти производные, часто называемые коэффициентами чувствительности, показывают, как выходная оценка y изменяется с изменением значений входных оценок x_1, x_2,..., x_N. В частности, изменение в y, вызванное небольшим изменением Δx_i во входной оценке x_i, дано формулой $(\Delta y)_i = (\partial f / \partial x_i)*(\Delta x_i)$. Если это изменение образовано стандартной неопределенностью оценки x_i, соответствующее изменение в y будет $(\partial f / \partial x_i)*u(x_i)$. Поэтому суммарную дисперсию $u_c^2(y)$ можно рассматривать как сумму членов, каждый из которых представляет оцененную дисперсию, связанную с выходной оценкой y, вызванной оцененной дисперсией, связанной с каждой входной оценкой x_i. Это предполагает запись уравнения (10) в виде:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[c_i u(x_i) \right]^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y), \qquad (11a)$$

где $c_i = \partial f / \partial x_i$, $u_c(y) = |c_i| u(x_i)$

(11b)

ПРИМЕЧАНИЯ.
1. Строго говоря, частные производные представляют собой $\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial X_i$,

оцененные на ожиданиях X_i. Однако на практике частные производные оцениваются как

$$\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial X_i \left| x_1, x_2, \ldots, x_N \right.$$

2. Суммарную стандартную неопределенность $u_c(y)$ можно численно рассчитать путем замены $c_i u(x_i)$ в уравнении (11а) на:

$Z_i = 1/2[f(x_1,\ldots,x_i+u(x_i),\ldots,x_N)-f(x_1,\ldots,x_i-u(x_i),\ldots,x_N)]$.

Таким образом, дается численная оценка $u_i(y)$ путем расчета изменения в y, обусловленного изменением в x_i на $+u(x_i)$ и на $-u(x_i)$. Тогда значение $u_i(y)$ может быть получено, как $|Z_i|$ и значение соответствующего коэффициента чувствительности c_i - как $Z_i/u(x_i)$.

ПРИМЕР - Для примера 4.1.1, используя одно и то же обозначение для величины и ее оценки в целях упрощения записи, имеем:

$c_1 = \partial P/\partial V = 2V/R_0[(1+\alpha(t-t_0)] = 2P/V$,
$c_2 = \partial P/\partial R_0 = -V^2/R_0^2[1+\alpha(t-t_0)] = -P/R_0$,
$c_3 = \partial P/\partial \alpha = -V^2(t-t_0)/R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2 = -P(t-t_0)/[1++\alpha(t-t_0)]$,
$c_4 = \partial P/\partial t = -V^2\alpha/R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2 = -P\alpha/[1+\alpha(t-t_0)]$
и
$u^2(P) = (\partial P/\partial V)^2u^2(V) + (\partial P/\partial R_0)^2u^2(R_0) + (\partial P/\partial \alpha)^2u^2(\alpha) + (\partial P/\partial t)^2u^2(t) = [c_1u(V)]^2 + [c_2u(R_0)]^2 + [c_3u(\alpha)]^2 + [c_4u(t)]^2 = u_1^2(P) + u_2^2(P) + +u_3^2(P) + u_4^2(P)$.

5.1.4 Коэффициенты чувствительности $\partial f/\partial x_i$ вместо того, чтобы рассчитываться из функции f, иногда определяются экспериментальным путем с помощью измерения изменения в Y, вызванного изменением в выбранном X_i, поддерживая при этом остальные входные величины неизменными. В этом случае знание функции f (или части ее, когда так определяются только некоторые коэффициенты чувствительности) соответственно сводится к эмпирическому разложению в ряд Тейлора первого порядка, основанного на измеренных коэффициентах чувствительности.

5.1.5 Если уравнение (1) для измеряемой величины Y расширяется относительно номинальных значений $X_{i,0}$ входных величин X_i, то для первого порядка (который обычно является адекватной аппроксимацией) $Y = Y_0 + c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + \ldots + c_N\delta_N$, где $Y_0 = f(X_{1,0}, X_{2,0}, \ldots, X_{N,0})$, $c_i = (\partial f/\partial X_i)$, оцененное при $X_i = X_{i,0}$ и $\delta_i = X_i - X_{i,0}$. Таким образом, в целях анализа неопределенности, измеряемая величина обычно может аппроксимироваться линейной функцией ее переменных путем преобразования ее входных величин от X_i к δ_i (см. Е.3.1).

ПРИМЕР - Из примера 2 в 4.3.7 оценка значения измеряемой величины V равна $V = \overline{V} + \Delta\overline{V}$, где $\overline{V}$=0,928571 В, $u(\Delta\overline{V})$=12 мкВ, суммируемая поправка $\Delta\overline{V}$=0 и $u(\Delta\overline{V})$=8,7 мкВ. Поскольку $\partial V/\partial\overline{V}=1$ и $\partial V/\partial(\Delta\overline{V})=1$, суммарная дисперсия, связанная с V, дается формулой

$u_c^2(V) = u^2(\overline{V}) + u^2(\Delta\overline{V})$=(12 мкВ)^2+(8,7 мкВ)^2 = =219*10^{-12} В^2

и суммарная стандартная неопределенность равна $u_c(V)$=15 мкВ, что соответствует относительной суммарной стандартной неопределенности $u_c(V)/\overline{V}$==16*10^{-6} В (см. 5.1.6). Это пример случая, когда измеряемая величина уже является линейной функцией величин, от которых она зависит, с коэффициентами c_i=+1. Из уравнения (10) следует, что если $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_NX_N$, и константы c_i=+1 или -1, то $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)$.

5.1.6 Если Y имеет вид $Y = c\,X_1^{p_1} * X_2^{p_2} * \ldots * X_N^{p_N}$ и известно, что степени p_i представляют собой положительные или отрицательные числа, имеющие пренебрежимо малые неопределенности, то суммарную дисперсию, уравнение (10), можно выразить, как

$$[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[p_i u(x_i)/x_i\right]^2 \quad (12)$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и уравнение (11а), но с суммарной дисперсией $u_c^2(y)$, выраженной как *относительная суммарная дисперсия* $[u_c(y)/y]^2$, и оцененной дисперсией $u^2(x_i)$, связанной с каждой входной оценкой, выраженной как оцененная *относительная дисперсия* $[u(x_i)/x_i]^2$. (*Относительная суммарная стандартная неопределенность* есть $u_c(y)/|y|$ и *относительная стандартная* *неопределенность* каждой входной оценки - $u(x_i)/|x_i|$, $|y| \neq 0$ и $|x_i| \neq 0$.)

ПРИМЕЧАНИЯ.

1. Преобразования измеряемой величины Y в этом виде в линейную функцию переменных (см. 5.1.5) легко достичь путем подстановки $X_i = X_{i,0}(1+\delta_i)$, и тогда получаем следующие приблизительные зависимости: $(Y-Y_0)/Y_0 = \sum_{i=1}^{N} p_i \delta_i$. С другой стороны, логарифмическое преобразование $Z = \ln Y$ и $W_i = \ln X_i$ ведет к точной линеаризации, выраженной через новые переменные: $Z = \ln c + \sum_{i=1}^{N} p_i W_i$.

2. Если каждое p равно либо +1, либо -1, то уравнение (12) принимает вид $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[u(x_i)/x_i\right]^2$, который показывает, что в этом особом случае относительная суммарная дисперсия, связанная с оценкой y просто равна сумме оцененных относительных дисперсий, связанных с входными оценками x_i.

5.2 Коррелированные входные величины.

5.2.1 Уравнение (10) и те уравнения, которые выведены из него, такие как (11) и (12), справедливы только в том случае, если входные величины X_i независимы или некоррелированы (считается, что инвариантами являются случайные переменные, а не физические величины - см. 4.1.1, Примечание 1). Если какие-либо из X_i в значительной степени коррелированы, то корреляцию необходимо брать в расчет.

5.2.2 Когда входные величины коррелированы, соответствующее выражение для суммарной дисперсии $u_c^2(y)$, связанной с результатом измерения, будет

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j), \qquad (13)$$

где x_i и x_j являются оценками X_i и X_j, а $u(x_i,x_j) = u(x_j,x_i)$ являются оцененной ковариацией, связанной с x_i и x_j. Степень корреляции между x_i и x_j характеризуется оцененным **коэффициентом корреляции** (С.3. 6)

$$r(x_i,x_j) = u(x_i,x_j)/u(x_i)u(x_j), \qquad (14)$$

где $r(x_i,x_j) = r(x_j,x_i)$ и $-1 \leq r(x_i,x_j) \leq +1$. Если оценки x_i и x_j независимы, то $r(x_i,x_j)=0$, и изменение одной из них не означает ожидаемого изменения другой (см. С.2.8, С.3.6 и С.3.7 для более подробной информации).

В терминах коэффициентов корреляции, которые легче истолковать, чем ковариации, член ковариации в уравнении (13) можно записать, как

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \qquad (15)$$

Таким образом, с помощью уравнения (11в) уравнение (13) принимает вид:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \qquad (16)$$

ПРИМЕЧАНИЯ.

1. Для весьма особого случая, когда все входные оценки коррелированы с коэффициентами корреляции $r(x_i,x_j)=+1$, уравнение (16) сводится к:

$$u_c^2(y) = \left(\sum_{i=1}^{N} c_i u(x_i)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i)\right)^2$$

Таким образом, суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$ является просто положительным квадратным корнем из *линейной суммы* членов, представляющих собой дисперсию выходной оценки y, вызванной стандартной неопределенностью каждой входной оценки x_i (см. 5.1.3). [Эту линейную сумму не следует путать с общим законом распространения погрешностей, хотя они и имеют похожую форму; стандартные неопределенности не являются погрешностями (см. Е.3.2).]

ПРИМЕР.

Десять резисторов, каждый из которых имеет номинальное сопротивление $R_i=1000$ Ом, откалиброваны с пренебрежимо малой неопределенностью сличения с помощью такого же эталонного резистора R_S на 1000 Ом, характеризующегося стандартной неопределенностью $u(R_S)$=100 мОм, как указано в его свидетельстве о сертификации. Резисторы соединены последовательно с помощью проводов, имеющих пренебрежимо малое сопротивление для того, чтобы получить образцовое сопротивление R_{ref} с номинальным сопротивлением 10 кОм. Таким образом, $R_{ref}=f(R_i)=\sum_{i=1}^{10} R_i$. Поскольку $r(x_i,x_j)$ = $=r(R_i,R_j)=+1$ для каждой пары резисторов (см. F.1.2.3, Пример 2), то применимо уравнение этого Примечания. Так как для каждого резистора $\partial f/\partial x_i = \partial R_{ref}/\partial R_i$ =1 и $u(x_i)$ = $=u(R_i)=u(R_S)$ (см. F.1.2.3, Пример 2), то это уравнение дает для суммарной стандартной неопределенности R_{ref} выражение $u_c(R_{ref})$ = $=\sum_{i=1}^{10} u(R_s)$ = 10*(100мОм) = 1 Ом. Результат $u_c(R_{ref})=[\sum_{i=1}^{10} u^2(R_s)]^{1/2}$ =0,32 Ом, полученный с помощью уравнения (10), неверен, так как он не учитывает, что все калиброванные значения десяти резисторов коррелированы.

2. Оцененные дисперсии $u^2(x_i)$ и оцененные ковариации $u(x_i,x_j)$ можно рассматривать как элементы ковариационной матрицы с элементами u_{ij}. Диагональные элементы u_{ii} матрицы являются дисперсиями $u^2(x_i)$, в то время как внедиагональные элементы $u_{ij}(i \neq j)$ являются ковариациями $u(x_i,x_j)= u(x_j,x_i)$. Если две входные оценки некоррелированы, то их ковариация и соответствующие элементы u_{ij} и u_{ji} ковариационной матрицы равны 0. Если все входные оценки некоррелированы, то все внедиагональные элементы равны нулю и ковариационная матрица является диагональной (см. также С.3.5).

3. В целях численного оценивания уравнение (16) можно записать, как

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Z_i Z_j r(x_i, x_j),$$

где Z_i дано в 5.1.3, Примечание 2.

4. Если X_i особого вида, рассмотренные в 5.1.6, коррелированы, то в правой части уравнения (12) необходимо добавить следующие члены:

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left[{}^{p_i u(x_i)}\!/_{x_i}\right]\left[{}^{p_j u(x_j)}\!/_{x_j}\right] r(x_i, x_j).$$

5.2.3 Рассмотрим два средние арифметические $\bar{q}$ и $\bar{r}$, которые оценивают ожидания μ_q и μ_r двух случайно изменяющихся величин q и r, и пусть $\bar{q}$ и $\bar{r}$ вычисляются из n независимых пар одновременных наблюдений q и r, сделанных при одинаковых условиях измерений (см. В.2.15). Тогда ковариация $\bar{q}$ и $\bar{r}$ оценивается по формуле (см. С.3.4):

$$s(\bar{q},\bar{r}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})(r_k - \bar{r}), \qquad (17)$$

где q_k и r_k являются индивидуальными наблюдениями величин q и r, а $\bar{q}$ и $\bar{r}$ рассчитываются из наблюдений в соответствии с уравнением (3). Если в действительности наблюдения некоррелированы, то предполагается, что расчетная ковариация примерно равна 0.

Таким образом, оцененная ковариация двух коррелированных входных величин X_i и X_j, которые оцениваются посредством $\overline{X}_i$ и $\overline{X}_j$, определенными из независимых пар повторных одновременных наблюдений, дается формулой $u(x_i,x_j)=s(\overline{X}_i,\overline{X}_j)$, где $s(\overline{X}_i,\overline{X}_j)$, рассчитываются в соответствии с уравнением (17). Такое использование уравнения (17) можно рассматривать, как оценку ковариации по типу А. Оцененный коэффициент корреляции для X_i и X_j получают из уравнения (14): $r(x_i,x_j)$ = $r(X_i,X_j)$ = $=s(\overline{X}_i,\overline{X}_j)/s(\overline{X}_i)s(\overline{X}_j)$.

ПРИМЕЧАНИЕ - Примеры, когда необходимо использовать ковариации, рассчитанные из уравнения (17), даны в Н.2 и Н.4.

5.2.4 Может существовать значительная корреляция между двумя входными величинами, если при их определении используют один и тот же измерительный прибор, физический эталон измерения или справочные данные, имеющие значительную стандартную неопределенность. Например, если поправка на температуру, необходимая для оценки входной величины X_i, получается с помощью некоторого термометра и такая же поправка на температуру, необходимая для оценки входной величины X_j, тоже получается с помощью этого же термометра, то две входные величины могут быть значительно коррелированы. Однако, если X_i и X_j в этом примере переопределены как величины без поправок, и величины, которые определяют калибровочную кривую термометра, включены как добавочные входные величины с независимыми стандартными неопределенностями, корреляция между X_i и X_j устраняется (см. F.1.2.3 и F.1.2.4 для дальнейшего обсуждения).

5.2.5 Корреляции между входными величинами нельзя игнорировать; если они имеются и значительны. Связанные с ними ковариации следует оценивать экспериментально, если это возможно, изменяя коррелированные входные величины (см. С.3.6, Примечание 3) или используя всю имеющуюся информацию о коррелированной изменчивости рассматриваемых величин (оценивание ковариации по типу В). Правильное понимание, базирующееся на прошлом опыте и общих знаниях (см. 4.3.1 и 4.3.2), особо необходимо при оценивании степени корреляции между входными величинами, возникающей из-за эффектов, оказывающих общие влияния, таких как температура окружающей среды, атмосферное давление и влажность. К счастью, во многих случаях эффекты таких влияний имеют пренебрежимо малую взаимозависимость, так что можно предположить, что входные величины, испытывающие такие влияния, некоррелированы. Однако если нельзя предположить, что они некоррелированы, сами корреляции могут быть исключены, если общие влияния введены как добавочные независимые входные величины, как указано в 5.2.4.

6 Определение расширенной неопределенности.

6.1 Введение

6.1.1 Рекомендация INC-1 (1980), разработанная Рабочей группой по составлению отчета о неопределенностях, на которой базируется данное *Руководство* (см. Введение), и Рекомендации 1 (CI-1981) и 1 (CI-1986), разработанные МКМВ, которые одобрили и вновь утвердили INC-1 (1980) (см. А.2 и А.3), поддерживают использование суммарной стандартной неопределенности $u_C(y)$ в качестве параметра для количественного выражения неопределенности результата измерения. В самом деле, во второй из его рекомендаций МКМВ предложил "всем участникам при представлении результатов всех международных сличений или других работ под эгидой МКМВ и Консультативных Комитетов" использовать, как это теперь называется, суммарную стандартную неопределенность $u_C(y)$.

6.1.2 Хотя $u_C(y)$ может повсеместно использоваться для выражения неопределенности результата измерения, в некоторых случаях в торговле, промышленности и регулирующих актах, а также когда дело касается здоровья и безопасности, часто необходимо дать меру неопределенности, которая указывает интервал для результата измерения, в пределах которого, можно ожидать, находится большая часть распределения значений, которые можно с достаточным основанием приписать измеряемой величине. Существование такого требования было признано Рабочей группой и привело к появлению параграфа 5 Рекомендации INC-1 (1980). Оно также отражено в Рекомендации 1 (CI-1986) МКМВ.

6.2 Расширенная неопределенность

6.2.1 Дополнительная мера неопределенности, которая соответствует требованию указания интервала, как упомянуто в 6.1.2, называется *расширенной неопределенностью* и обозначается символом U. Расширенную неопределенность U получают путем умножения суммарной стандартной неопределенности $u_C(y)$ на *коэффициент охвата* k:

$$U=ku_C(y) \tag{18}$$

Тогда результат измерения удобно выражается как $Y=y\pm U$, что означает, что наилучшей оценкой значения, приписываемого измеряемой величине Y, является y, и что интервал от $y-U$ до $y+U$ содержит, можно ожидать, большую часть распределения значений, которые можно с достаточным основанием приписать Y. Такой интервал также выражается как $y-U\leq Y\leq y+U$.

6.2.2 Термины **доверительный интервал** (С.2.27, С.2.28) и **уровень доверия** (С.2.29) имеют в статистике специальные определения и применяются к интервалу, определяемому U, только когда выполнены определенные условия, включая условие, чтобы все составляющие неопределенности, которые входят в $u_C(y)$, были бы получены из оценивания по типу А. Таким образом, в данном *Руководстве* слово "доверие" не используется для модификации слова "интервал", когда ссылаются на интервал, определяемый U; и термин "доверительный уровень" также не используется в связи с интервалом и предпочитается скорее термин "уровень доверия". Более конкретно, U рассматривается как задание интервала вокруг результата измерения, который содержит большую часть p распределения вероятностей, характеризуемого результатом и его суммарной стандартной неопределенностью, и p является *вероятностью охвата* или *уровнем доверия* для этого интервала.

6.2.3 Если это возможно, необходимо оценить и указать доверительный уровень p, связанный с интервалом, определяемым U. Надо признать. что умножение $u_C(y)$ на какую-то постоянную величину не дает никакой новой информации, а просто представляет ранее имевшуюся информацию в новом виде. Однако нужно также признать, что в большинстве случаев уровень доверия p (особенно для значений p, близких к 1) будет скорее неопределенным не только из-за ограниченного знания распределения вероятностей, характеризуемых y и $u_c(y)$ (особенно в крайних областях), но также из-за неопределенности самой $u_c(y)$ (см. Примечание 2 к 2.3.5, 6.3.2 и Приложение G, особенно G.6.6).

ПРИМЕЧАНИЕ - Предпочтительный способ указания результата измерения, когда мера неопределенности есть $u_c(y)$ или U, смотри соответственно в 7.2.2 и 7.2.4.

6.3 Выбор коэффициента охвата

6.3.1 Значение коэффициента охвата k выбирается на основе уровня доверия, требуемого интервалом от y-U до y+U. Обычно k бывает в диапазоне от 2 до 3. Однако в особых случаях k может выходить за пределы этого диапазона. Богатый опыт и полное знание способов применения результата измерения может ускорить выбор нужного значения k.

ПРИМЕЧАНИЕ - Иногда может обнаружиться, что известная поправка b на систематический эффект не вносилась в сообщаемый результат измерения, а вместо этого была сделана попытка учесть эффект путем расширения "неопределенности", приписываемой результату. Этого следует избегать; только при особых обстоятельствах не вносятся поправки в результат измерения на известные значимые систематические эффекты (см. F.2.4.5 для особого случая и как обращаться с ним). Оценивание неопределенности результата измерения не следует путать с предписанием безопасного допуска какой-либо величине.

6.3.2 В идеале хотелось бы иметь возможность выбрать конкретное значение коэффициента охвата k, которое обеспечивало бы интервал $Y=y\pm U=y\pm ku_c(y)$, соответствующий выбранному уровню доверия, такому как 95 или 99 процентов; равным образом, для заданного значения k хотелось бы иметь возможность четко указать уровень доверия, связанный с этим интервалом. Однако это нелегко осуществить на практике, поскольку это требует полного знания распределения вероятностей, характеризуемого результатом измерения y и его суммарной стандартной неопределенностью $u_c(y)$. Хотя эти параметры обладают большой значимостью, сами по себе они недостаточны для того, чтобы установить интервалы, имеющие точно известные уровни доверия.

6.3.3 Рекомендация INC-1 (1980) не показывает, как следует устанавливать отношение между k и p. Этот вопрос рассматривается в Приложении G, и предпочтительный способ его приближенного решения представлен в G.4, а итог подведен в G.6.4. Однако часто является адекватным более простой подход, обсуждаемый в G.6.6, для измерительных ситуаций, где распределение вероятностей, характеризуемое y и $u_c(y)$, является приблизительно нормальным и число эффективных степеней свободы $u_c(y)$ значительно. В этом случае, часто встречающемся на практике, можно предположить, что принятие k=2 дает интервал, имеющий уровень доверия примерно 95 процентов, а принятие k=3 дает интервал, имеющий уровень доверия приблизительно 99 процентов.

ПРИМЕЧАНИЕ - Метод оценивания эффективных степеней свободы $u_c(y)$ дан в G.4. Таблица G.2 Приложения G может быть использована, чтобы помочь установить, приемлемо ли это решение для конкретного измерения (см. G.6.6).

7 Составление отчета о неопределенности.

7.1 Общие рекомендации

7.1.1 В целом, при движении вверх по иерархии измерений требуется все больше подробностей о том, как были получены результат измерения и его неопределенность. Тем не менее, на любом уровне этой иерархии, включая коммерческую и регулирующую деятельность на рынке, инженерную работу в промышленности, калибровочные услуги более низкого уровня, промышленные исследования и разработки, академические исследования, промышленные первичные эталоны и калибровочные лаборатории, национальные лаборатории эталонов и МБМВ, вся информация, необходимая для повторного оценивания измерения должна быть доступна для тех, кто может в ней нуждаться. Глубинная разница заключается в том, что на более низких уровнях иерархической цепи большая часть необходимой информации может быть сделана доступной в форме опубликованных отчетов о калибровке и испытаниях, спецификаций по испытаниям, сертификатов о калибровке и испытаниях, руководств по эксплуатации, международных и национальных стандартов и локальных регулирующих актов.

7.1.2 Когда подробности об измерении, включая то, как была оценена неопределенность его результата, обеспечиваются ссылкой на существующие документы, как это часто бывает в случае, когда результаты калибровки приводятся в сертификате, настоятельно необходимо, чтобы эти документы поддерживались на современном уровне так, чтобы они соответствовали непосредственно используемой в настоящее время процедуре измерения.

7.1.3 Огромное число измерений производится каждый день в промышленности и торговле без каких-либо развернутых отчетов о неопределенности. Однако многие из них проводятся с помощью приборов, подлежащих периодической калибровке или узаконенной поверке. Если известно, что используемые приборы находятся в соответствии с их спецификациями или с существующими нормативными документами, которые на них распространяются, то неопределенности их показаний могут быть извлечены из этих спецификаций или нормативных документов.

7.1.4 Хотя на практике количество информации, необходимое для того, чтобы задокументировать результат измерения, зависит от его предполагаемого использования, основной принцип назначения требований к ним остается неизменным: при составлении отчета о результате измерения и его неопределенности лучше дать слишком много информации, чем слишком мало. Например, следует:

а) ясно описать методы, используемые для вычисления результата измерения и его неопределенности из экспериментальных наблюдений и входных данных;

б) перечислить все составляющие неопределенности и полностью задокументировать, как они оценивались;

в) представить анализ данных таким образом, чтобы можно было легко следовать всем его важным этапам и в случае необходимости независимо повторить вычисление сообщаемого результата;

г) дать все поправки и константы, используемые в анализе , и их источники.

Для того чтобы проверить приведенный выше список, нужно спросить себя: "Дал ли я достаточно информации в достаточно ясном виде для того, чтобы мой результат можно было улучшить в будущем, если появится новая информация или новые данные?"

7.2 Конкретные рекомендации

7.2.1 Когда указывается результат измерения и мерой неопределенности является суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$, следует:

а) дать полное описание того, как определяется измеряемая величина Y;

б) дать оценку y измеряемой величины Y и ее суммарную стандартную неопределенность $u_c(y)$; всегда должны быть указаны единицы для y и $u_c(y)$;

в) в случае необходимости включить относительную стандартную неопределенность $u_c(y)/|y|$, $|y| \neq 0$;

г) дать информацию, приведенную в 7.2.7, или сослаться на опубликованный документ, содержащий ее.

Если это предполагается полезным для лиц, которые намерены воспользоваться результатом измерения, например, для того чтобы помочь в будущем при расчетах коэффициентов охвата или помочь в понимании измерения, можно указать:

- оцененные эффективные степени свободы $\nu_{эфф}$ (см. G.4);

- суммарные стандартные неопределенности по типу А и В - $u_{cA}(y)$и $u_{cB}(y)$, и их оцененные эффективные степени свободы $\nu_{эффА}$ и $\nu_{эффВ}$ (см. G.4.1, Примечание 3).

7.2.2 Когда мера неопределенности - $u_c(y)$, лучше всего указать численный результат измерения одним из следующих четырех способов для того, чтобы предотвратить непонимание (предполагается, что величина, чье значение сообщается, является эталоном массы m_S с номинальным значением 100 г; слова в скобках можно опустить для краткости, если u_c определяется где-либо еще в документе, сообщающем результат):

1) "m_S=100,02147 г с (суммарной стандартной неопределенностью) u_C=0,35 мг";

2) "m_S=100,02147(35) г, где цифры в скобках являются численным значением (суммарной стандартной неопределенности) u_C, соответствующим последним цифрам приведенного результата";

3) "m_S=100,02147(0,00035) г, где число в скобках является численным значением (суммарной стандартной неопределенности) u_C, выраженной в единицах приведенного результата;

4) "m_S=(100,02147±0,00035) г, где число, следующее за знаком ±, является численным значением (суммарной стандартной неопределенности) u_C, а не доверительным интервалом.

ПРИМЕЧАНИЕ - Форму со знаком ± следует по возможности избегать, поскольку традиционно она использовалась для указания интервала, соответствующего высокому уровню доверия, и, следовательно, может быть спутана с расширенной неопределенностью (см. 7.2.4). Далее, хотя скобки в 4) используются с целью предотвращения такой путаницы, запись $Y=y \pm u_C(y)$ может быть все-таки неправильно истолкована, особенно если скобки случайно будут опущены, а именно, что здесь подразумевается расширенная неопределенность с k=1 и что интервал $y-u_C(y) \leq Y \leq y+u_C(y)$ имеет определенный уровень доверия p, а именно - уровень, связанный с нормальным распределением (см. G.1.3). Как указано в 6.3.2 и Приложении G, истолкование $u_C(y)$ таким способом обычно трудно оправдать.

7.2.3 Когда указывается результат измерения и мерой неопределенности является расширенная неопределенность $U=ku_C(y)$, следует:

а) дать полное описание, как определена измеряемая величина Y;

б) указать результат измерения, как $Y=y \pm U$ и привести единицы для y и U;

в) когда приемлемо, включить относительную расширенную неопределенность $U/|y|$, $|y| \neq 0$;

г) дать значение k, используемое для получения U (или дать и k, и u_C(у) для удобства тех, кто использует результат);

д) привести приблизительный уровень доверия, связанный с интервалом $y \pm U$ и указать, как он был определен;

е) дать информацию, описанную в 7.2.7, или ссылку на опубликованный документ, содержащий ее.

7.2.4 Когда мерой неопределенности является U, то лучше всего для максимальной ясности указать численный результат измерения, как в следующем примере (слова в скобках можно опустить для краткости, если U, u_c и k определены где-либо еще в документе, сообщающем результат).

"m_S=(100,02147±0,00079) г, где число, следующее за знаком ±, является численным значением (расширенной неопределенности) $U=ku_c$, где U определено из (суммарной стандартной неопределенности) u_c=35 мг и (коэффициента охвата) k=2,26, основанного на t - распределении для ν=9 степеней свободы, и определяет интервал, оцененный как имеющий уровень доверия 95 процентов.

7.2.5 Если процедура измерения определяет одновременно более одной измеряемой величины, т.е. если она дает значения двух или более выходных оценок y_i (см. Н.2, Н.3 и Н.4), то кроме y_i и $u_c(y_i)$ для каждой нужно дать элементы ковариационной матрицы $u(y_i, y_j)$ или элементы $r(y_i, y_j)$ **матрицы коэффициентов корреляции** (С.3.6, Примечание 2), а лучше и те, и другие.

7.2.6 Численные значения оценки y и ее стандартной неопределенности $u_c(y)$ или расширенной неопределенности U не следует давать с избыточным числом цифр. Обычно достаточно привести $u_c(y)$ и U (а также стандартной неопределенности $u(x_i)$ входных оценок x_i) от силы с двумя значащими цифрами, хотя в некоторых случаях может быть необходимо сохранить дополнительные цифры для того, чтобы избежать погрешностей округления в последующих расчетах.

При сообщении окончательных результатов иногда может быть уместным округлить неопределенности в сторону увеличения, а не до ближайшей цифры. Например, $u_c(y)$=10,47 мОм можно округлить до 11 мОм. Однако здравый смысл должен возобладать, и значение, такое как $u(x_i)$=28,05 кГц, следует округлить до 28 кГц. Выходные и входные оценки должны округляться так, чтобы соответствовать своим неопределенностям; например, если y=10,05762 Ом с $u_c(y)$=27 мОм, то y следует округлить до 10,058 Ом. Коэффициенты корреляции должны даваться с точностью до третьей цифры, если их абсолютные значения близки к единице.

7.2.7 При подробном описании того, как были получены результат измерения и его неопределенность, необходимо следовать рекомендациям 7.1.4 и, таким образом:

а) дать значение каждой входной оценки x_i и ее стандартной неопределенности $u(x_i)$ вместе с описанием того, как они были получены;

б) дать оцененные ковариации и коэффициенты корреляции (а лучше и те, и другие) для всех коррелированных входных оценок и методы, использованные для их получения;

в) указать степени свободы для стандартной неопределенности каждой входной оценки и то, как они были получены;

г) дать функциональную зависимость $Y=f(X_1, X_2,..., X_N)$, и, в случае надобности - частные производные или коэффициенты чувствительности $\partial f/\partial x_i$. Однако любой из таких коэффициентов, определенных экспериментально, привести необходимо.

ПРИМЕЧАНИЕ - Поскольку функциональная зависимость f может быть чрезвычайно сложной и может отсутствовать в явном виде, а только в виде компьютерной программы, не всегда оказывается возможным дать f и ее производные. В этом случае f можно описать общими терминами или дать соответствующую ссылку на используемую программу. В таких случаях важно, чтобы было ясным, как были получены оценка y измеряемой величины Y и ее суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$.

8 Краткое описание процедуры оценивания и выражения неопределенности

Этапы, которым нужно следовать при оценивании и выражении неопределенности результата измерения, как представлено в данном *Руководстве*, можно свести к следующим:

1 Выразите математически зависимость между измеряемой величиной Y и входными величинами X_i, от которых она зависит: $Y=f(X_1, X_2,..., X_N)$. Функция f должна содержать каждую величину, включая все поправки и поправочные множители, которая может внести значительную составляющую в неопределенность результата измерения (см. 4.1.1 и 4.1.2).

2. Определите x_i- оцененное значение входной величины X_i, либо на основе статистического анализа рядов наблюдений или другими средствами (см. 4.1.3).

3. Оцените *стандартную неопределенность* $u(x_i)$ каждой входной оценки x_i. Для входной оценки, полученной из статистического анализа рядов наблюдений, стандартная неопределенность оценивается, как описано в 4.2 (*оценивание стандартной неопределенности по типу А*). Для входной оценки, полученной другими средствами, стандартная неопределенность $u(x_i)$ оценивается, как описано в 4.3 (*оценивание стандартной неопределенности по типу В*).

4. Если значения каких-либо входных величин коррелированы, оцените их ковариации (см. 5.2).

5. Рассчитайте результат измерения, т.е. оценку y измеряемой величины Y из функциональной зависимости f, используя для входных величин X_i оценки x_i , полученные на этапе 2 (см. 4.1.4).

6. Определите *суммарную стандартную неопределенность* $u_c(y)$ результата измерения y из стандартных неопределенностей и ковариаций, связанных с входными оценками, как описано в разделе 5. Если измерение определяет одновременно более одной входной величины, рассчитайте их ковариации (см. 7.2.5, H.2, H.3 и H.4).

7. Если требуется дать *расширенную неопределенность* U, чьей целью является обеспечение интервала от $y-U$ до $y+U$, в пределах которого, предположительно, находится большая часть распределения значений, которые можно с достаточным основанием приписать измеряемой величине Y, умножьте суммарную стандартную неопределенность $u_c(y)$ на *коэффициент охвата* k, обычно находящийся в диапазоне от 2 до 3, чтобы получить $U=ku_c(y)$. Выберите k, исходя из желаемого уровня доверия, требуемого для интервала (см. 6.2 и 6.3 и особенно Приложение G, рассматривающее выбор значения k, которое обеспечивает интервал, имеющий уровень доверия, близкий к заданному значению).

8. Сообщите результат измерения y вместе с его суммарной стандартной неопределенностью $u_c(y)$ или расширенной неопределенностью U, как рассмотрено в 7.2.1 и 7.2.3; используйте одну из форм, как указано в 7.2.2 и 7.2.4. Опишите, как подчеркнуто также в разделе 7, каким образом были получены y и $u_c(y)$ или U.

Приложение А

Рекомендации рабочей группы и МКМВ

А.1 Рекомендация INC-1 (1980)

Рабочая группа по определению неопределенностей была созвана МБМВ в октябре 1980 г. по инициативе МКМВ. Она подготовила подробный отчет, завершающийся Рекомендацией INC-1 (1980) [2]. Английский перевод этой Рекомендации дан в п. 0.7 данного *Руководства*. Французский текст представлен ниже [2]:

Expression des incertitudes expérimentales

Recommandation INC-I (1980)

l. L'incertitude d'un résultat de mesure comprend généralement plusiers composantes qui peuvent être groupées en deux catégories d'aprés la méthode utilisée pour estimer leur valeur numérique:

A. celles qui sont évaluées à l'aide de méthodes statistiques,

B. celles qui sont щvaluщes par d'autres moyens.

Il n'y a pas toujours une correspondance simplé entre le classement dans les catégories A ou B et le caractère "aléatoire" ou "systématique" utilisé antérieurement pour classer les incertitudes. L'expression "incertitude systématique" est susceptible de conduire à des erreurs d'interprétation: elle doit être évitée.

Toute description détaillée de l'incertitude devrait comprendre une liste complète de ses composantes et indiquer pour chacune la méthode utilisée pour lui attribuer une valeur numérique..

2. Les composantes de la catégorie A sont caractérisées par les variances estimées $s^2{}_i$ (ou les "écarts-types" estimés s_i) et les nombres v_i, de degrés de liberté. Le cas échéant, les covariances estimées doivent être données.

3. Les composantes de la catégorie B devraient être caractérisées par des termes $u^2{}_j$ qui puissent être considérés comme des approximations des variances correspondantes dont on admet l'existence. Les termes $u^2{}_j$ peuvent être traités comme des variances et les termes u_j comme des écarts- types. Le cas échéant, les covariances doivent être traitées de façon analogue.

4. L'incertitude composщe devrait être caractérisée par la valeur obtenue en appliquant la méthode usuelle de combinaison des variances. L'incertitude composée ainsi que ses composantes devraient être exprimées sous la forme d'"écart-types".

5. Si pour des utilisations particulières on est amené à multiplier par un facteur l'incertitude composée afin d'obtenir une incertitude globale, la valeur numérique de ce facteur doit toujours être donnée.

A.2 Рекомендация 1 (МК-1981)

МКМВ рассмотрел отчет, представленный Рабочей Группой по Определению Неопределенностей и на 70-ой сессии, состоявшейся в октябре 1981 г., принял следующую рекомендацию [3]:

Рекомендация 1 (МК-1981)
Выражение экспериментальных неопределенностей

Международный комитет мер и весов,

учитывая

- необходимость выработки единой формы выражения неопределенностей измерений в метрологии,
- усилия прилагаемые для этой цели различными организациями в течение многих лет,
- прогресс, достигнутый в поиске приемлемого решения, явившейся прямым результатом деятельности Рабочей Группы по Определению Погрешности, созданной в МБМВ в 1980 г.

признавая

- что предложения Рабочей Группы могли бы явиться основой для окончательного соглашения по выражению неопределенностей,

рекомендует

- чтобы предложения, выдвинутые Рабочей Группой, были доведены до широких кругов заинтересованных лиц и организаций;
- чтобы МБМВ предприняло все усилия для применения принципов, заложенных в этих предложениях, к международным сличениям, которые будут проводиться при его содействии в будущем;
- чтобы другие заинтересованные организации изучали и практически применяли эти предложения, а также сообщали свое мнение в МБМВ;
- чтобы в течение 2-3 лет МБМВ выработало указания по практическому применению этих предложений.

A.3 Рекомендация 1 (МК-1986)

МКМВ на своей 75-ой сессии (окт. 1986) кроме того, рассмотрел вопрос о выражении неопределенностей и принял следующую рекомендацию [4]:

Рекомендация 1 (МК-1986)
Выражение неопределенностей в работах, проводимых МКМВ

Международный комитет мер и весов,

учитывая, что Рабочая Группа по Определению Неопределенностей приняла Рекомендацию INC-1 (1980), а МКМВ принял Рекомендацию 1 (МК-1981),

учитывая, что некоторые члены Консультативных Комитетов нуждаются в прояснении данной Рекомендации в приложении к тем задачам, которые входят в сферу их компетентности, особенно, в том, что касается международных сличений,

признавая, что параграф 5 Рекомендации INC-1 (1980), относящийся к особым случаям, особенно, имеющим промышленную значимость, в настоящее время рассматривается рабочей группой ИСО, МОЗМ и МЭК, при содействии и сотрудничества МКМВ,

рекомендует применение параграфа 4 Рекомендации INC-1 (1980) всеми участниками при оформлении результатов всех международных сличений или других работ, проводимых МКМВ или его Консультативными Комитетами; а также - чтобы суммарные погрешности типа А и В выражались в виде *единого стандартного отклонения*.

Приложение В

Основные метрологические термины

В.1 Источник определений

При составлении данного *Руководства* по основным метрологическим терминам были использованы определения из *Международного словаря основных и общих терминов метрологии* (сокращенно VIM), второе издание [6], выпущенного Международной организацией по стандартизации (ИСО) от имени семи организаций, оказавших поддержку при его создании и предоставивших своих экспертов для его подготовки, среди них: Международное бюро мер и весов (МБМВ), Международная электротехническая комиссия (МЭК), Международная федерация клинической химии (МФКХ), ИСО, Международный союз по теоретической и прикладной химии (ИЮПАК), Международный союз по теоретической и прикладной физике (ИЮПАП) и Международная организация законодательной метрологии (МОЗМ). VIM должен являться основополагающим источником, к которому следует обращаться относительно определения терминов, не включенных либо в *Руководство*, либо в текст.

Примечание - Некоторые основные статистические термины и понятия приведены в приложении С, в то время как термины “истинное значение”, “погрешность” и “неопределенность” рассматриваются далее в приложении D.

В.2 Определения

Как и в разделе 2, в следующих далее определениях использование скобок, ограничивающих определенные слова некоторых терминов, означает, что эти слова могут быть опущены, если это не вызовет путаницы.

Термины, выделенные жирным шрифтом в некоторых примечаниях, являются дополнительными метрологическими терминами, определения которых даются в этих примечаниях - прямо или косвенно (см. [6]).

В.2.1 (Измеримая) величина [VIM 1.1] - свойство явления, объекта или вещества, которое может выделяться качественно и определяться количественно

ПРИМЕЧАНИЯ.
1 Термин "величина" может обозначать величину в общем смысле [см. примеры а)] или **конкретную величину** [см. примеры b)].

ПРИМЕРЫ.

а) величины в общем смысле: длина, время, масса, температура, электрическое сопротивление, концентрация вещества;

b) конкретные величины:
- длина данного стержня;
- электрическое сопротивление данного образца провода;
- концентрация этанола в данной пробе вина.

2 Величины, которые можно расположить по порядку значений величины друг относительно друга, называются **однородными величинами**.

3 Однородные величины могут быть сгруппированы по **категориям величин**, например:
- работа, теплота, энергия;
- толщина, длина окружности, длина волны.

4 **Обозначения величин** приведены в ИСО 31.

B.2.2 Значение (величины) [VIM 1.18] - значение конкретной величины, выражаемое, как правило, произведением единицы измерения на число.

ПРИМЕРЫ.

a) длина стержня 5,34 м или 534 см;
b) масса тела 0,152 кг или 152 г;
c) количество вещества пробы воды (H_2O) 0,012 моль или 12 ммоль.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Значение величины может быть положительным,, отрицательным или нулевым;

2 Значение величины может быть выражено разными способами.

3 Значения величин, имеющих размерность, равную 1, как правило, выражаются безразмерным числом.

4 Величина, которая не может быть выражена в виде произведения единицы измерения на число, может быть выражена ссылкой на принятую условную шкалу или на измерительную процедуру, или на то и другое.

B.2.3 Истинное значение (величины) [VIM 1.19] -
значение, соответствующее определению данной конкретной величины.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Это - значение, которое могло бы быть получено при идеальном измерении.

2 Истинное значение по природе неопределимо.

3 В английском языке неопределенный артикль чаще, чем определенный, используется в сочетании с термином "истинное значение", т.к. может быть много значений, соответствующих определению данной конкретной величины.

Пояснение к *Руководству*: см. приложение D, в частности - D.3.5, где указаны причины, по которым термин "истинное значение" не используется в этом *Руководстве* и по которым термины "истинное значение измеряемой величины" (или величины) или "значение измеряемой величины" (или величины) рассматриваются как эквивалентные.

B.2.4 Действительное значение (величины) [VIM 1.20] -
значение, приписываемое конкретной величине и принимаемое, часто по соглашению, как имеющее неопределенность, приемлемую для данной цели.

ПРИМЕРЫ.

a) здесь значение, приписываемое величине, воспроизводимой эталоном, может быть принято в качестве действительного значения;

b) Рекомендованное КОДАТА в 1986 г. значение для постоянной Авогадро составляет ($6{,}0221367 \times 10^{23}$ моль$^{-1}$)

ПРИМЕЧАНИЯ

1 "Действительное значение величины" иногда называют **приписанным значением**, **наилучшей оценкой** величины, **номинальным значением** или **исходным значением**. Однако "исходное значение" - в этом смысле, не следует путать с "исходным значением" в смысле, указанном в Примечании к 5.7 [VIM].

2 Часто для определения действительного значения используется несколько результатов измерений величины.

Пояснение к *Руководству*: см. пояснение к B.2.3 *Руководства*.

B.2.5 Измерение [VIM 2.1] -

совокупность операций, имеющих целью определение значения величины.

ПРИМЕЧАНИЕ - Операции могут выполняться автоматически.

В.2.6 Принцип измерения [VIM 2.3] - научная основа измерения.

ПРИМЕРЫ.

a) применение термоэлектрического эффекта для измерения температуры;

b) применение эффекта Джозефсона для измерения разности электрического потенциала;

c) применение эффекта Доплера для измерения скорости;

d) применение эффекта Рамана для измерения волнового числа молекулярных вибраций.

В.2.7 Метод измерения [VIM 2.4] - логическая последовательность операций, описанная в общем виде, которая применяется при выполнении измерений.

ПРИМЕЧАНИЕ - Методы измерения могут быть различными, например:
- **метод измерений замещеннем,**
- **дифференциальный метод,**
- **нулевой метод.**

В.2.8 Измерительная процедура [VIM 2.5] (методика выполнения измерений)- специально описанная совокупность операций, используемая при выполнении конкретных измерений в соответствии с данным методом.

ПРИМЕЧАНИЕ - Измерительная процедура обычно вносится в документ, который сам иногда называется "измерительная процедура" (или **метод измерення**) и обычно содержащиеся в нем сведения являются достаточными для оператора, чтобы выполнить измерения без дополнительной информации.

В.2.9 Измеряемая физическая величина [VIM 2.6] - конкретная величина, подвергаемая измерению.

ПРИМЕР - давление пара в данной пробе воды при 20 °С.

ПРИМЕЧАНИЕ - Определение измеряемой физической величины может потребовать определения таких величин, как время, температура и давление.

В.2.10 Влияющая величина [VIM 2.7] - величина, которая не является предметом измерения, но влияющая на результат измерения.

ПРИМЕРЫ.

a) температура микрометра, применяемого для измерения длины;

b) частота при измерении амплитуды переменного электрического напряжения;

c) концентрация билирубина при измерении концентрации гемоглобина в пробе плазмы крови человека.

Пояснение к *Руководству*: Определение влияющей величины подразумевает включение величин, связанных с измерительными эталонами, образцовыми веществами и справочными данными, от которых может зависеть результат измерения, а также от таких явлений, как кратковременные флюктуации параметров измерительного прибора, и таких величин, как температура окружающей среды, атмосферное давление и влажность.

В.2.11 Результат измерения [VIM 3.1]- значение, приписываемое измеряемой величине, полученное путем измерения.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 При приведении результата следует ясно указать, относится ли он к:
- показанию прибора;
- результату без учета поправки;
- результату с учетом поправки,

или к среднему нескольких значений.

2 Полная формулировка результата измерения включает информацию о неопределенности измерения.

В.2.12 Неисправленный результат измерения [VIM 3.3] - результат измерения до введения поправки на систематическую погрешность.

В.2.13 Исправленный результат измерения [VIM 3.4] - результат измерения после введения поправки на систематическую погрешность.

В.2.14 Точность измерения [VIM 3.5] - близость результата измерения к истинному значению измеряемой величины.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 "Точность" является качественным понятием.

2 Не следует употреблять термин **прецизионность** вместо "точности".

Пояснение к *Руководству*: См. Пояснение к В.2.3 *Руководства*.

В.2.15 Сходимость (результатов измерений) [VIM 3.6] - близость результатов последовательных измерений одной и той же измеряемой величины, выполненных в одинаковых условиях измерений.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Эти условия называются **условиями сходимости**.

2 К условиям сходимости относятся:
- одна и та же измерительная процедура;
- один и тот же наблюдатель;
- один и тот же измерительный прибор, применяемый в одних и тех же условиях;
- одно и то же место;
- повторение измерений в течение короткого периода времени.

3 Сходимость может выражаться количественно через параметры, характеризующие дисперсию результатов.

В.2.16 Воспроизводимость (результатов измерений) [VIM 3.7] - близость результатов измерений одной и той же измеряемой величины, при проведении измерений в измененных условиях.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Для обоснованного утверждения о воспроизводимости следует указывать, какие условия были изменены.

2 Изменяющиеся условия могут включать:
- принцип измерения;
- метод измерения;
- наблюдателя;
- измерительный прибор;
- измерительный эталон;
- место;
- условия применения;
- время.

3 Воспроизводимость может быть выражена количественно с помощью параметров, характеризующих дисперсию результатов.

4 В этих случаях обычно подразумевается, что результаты измерения являются исправленными результатами.

В.2.17 Экспериментальное стандартное отклонение [VIM 3.8] - величина $s(q_k)$ для ряда n измерений одной и той же измеряемой величины, характеризующая рассеяние результатов и определяемая по формуле:

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2}{n-1}},$$

где: q_k - результат k-го измерения;

$\overline{q}$ - среднее арифметическое из n рассматриваемых результатов.

ПРИМЕЧАНИЯ

1 Если рассматривать ряд значений n как выборку из распределения, то $\bar{q}$ - несмещенная оценка среднего значения μ_q, а $s^2(q_k)$ - несмещенная оценка дисперсии σ^2 этого распределения.

2 Выражение $s(q_k)/\sqrt{n}$ является оценкой стандартного отклонения распределения $\bar{q}$ и называется **экспериментальным стандартным отклонением среднего значения**.

3 "Экспериментальное стандартное отклонение среднего значения" иногда неправильно называют **средней квадратической погрешностью среднего значения**.

Пояснение к *Руководству*: Некоторые обозначения, применяемые в VIM, были изменены с целью достижения единообразия с обозначениями, используемыми в 4.2 данного *Руководства*.

B.2.18 Неопределенность (измерения) [VIM 3.9] -
параметр, связанный с результатом измерений и характеризующий рассеяние значений, которые достаточно обоснованно могли бы быть приписаны измеряемой величине.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Параметром может быть, например, стандартное отклонение (или число, кратное ему), или половина интервала, имеющего указанный уровень доверия.

2 Неопределенность измерения состоит, в общем случае, из многих составляющих. Некоторые из этих составляющих могут быть оценены на основании статистического распределения результатов рядов измерений и могут характеризоваться экспериментальными стандартными отклонениями. Другие составляющие, которые также могут характеризоваться стандартными отклонениями, вычисляются из предполагаемого распределения вероятностей, основанного на опыте или другой информации.

3 Подразумевается, что результат измерения является лучшей оценкой значения измеряемой величины и что все составляющие неопределенности, включая составляющие, обусловленные систематическими эффектами, такими как связанные с поправками и эталонами, приводят к рассеянию.

Пояснение к *Руководству*: В VIM указывается, что это определение и примечания - идентичны определению и примечаниям в данном *Руководстве* (см. 2.2.3).

B.2.19 Погрешность (измерения) [VIM 3.10] -
отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Так как истинное значение не может быть определено, на практике применяется действительное значение (см. [VIM] 1.19 [B.2.3] и 1.20 [B.2.4]).

2 Когда необходимо различать "относительную погрешность" и "погрешность", последнюю иногда называют **абсолютной погрешностью измерения**. Этот термин не следует путать с **абсолютным значением погрешности**, которое является модулем погрешности.

Пояснение к *Руководству*: Если результат измерения зависит от значений еще каких-либо величин, помимо измеряемой, погрешности измеренных значений этих величин вносят вклад в погрешность результата измерения. См. также Пояснения к B.2.22 и B.2.3 *Руководства*.

B.2.20 Относительная погрешность [VIM 3.12] -
отношение погрешности измерения к истинному значению измеряемой величины.

ПРИМЕЧАНИЕ - Так как истинное значение не может быть определено, на практике применяется действительное значение (см. [VIM] 1.19 [B.2.3] и 1.20 [B.2.4]).

Пояснение к *Руководству*: См. Пояснение к В.2.3 *Руководства.*

В.2.21 Случайная погрешность [VIM 3.13] -
разность результата измерения и среднего значения, которое могло бы быть получено при бесконечно большом числе повторных измерений одной и той же измеряемой величины, проводимых в условиях сходимости.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Случайная погрешность равна погрешности измерения минус систематическая погрешность.

2 Так как может быть выполнено только ограниченное число измерений, можно определить только оценку случайной погрешности.

Пояснение к *Руководству*: См. Пояснение к В.2.22 *Руководства.*

В.2.22 Систематическая погрешность [VIM 3.14] -
разность между средним значением, получаемым при бесконечном числе измерений одной и той же измеряемой величины в условиях сходимости, и истинным значением измеряемой величины.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Систематическая погрешность равна погрешности измерения минус случайная погрешность.

2 Как и истинное значение, систематическая погрешность и ее причины не могут быть полностью известны.

3 Что касается измерительного прибора, см. "систематическая погрешность (измерительного прибора)" [VIM 5.25).

Пояснение к *Руководству*: Погрешность результата измерения (см. В.2.19) может часто рассматриваться как результат воздействия ряда случайных и систематических эффектов, которые вносят свой вклад в погрешность результата измерения. См. также Пояснение к В.2.19 и В.2.3 *Руководства.*

В.2.23 Поправка [VIM 3.15] -
значение величины, которое алгебраически суммируется с неисправленным результатом измерения для компенсации систематической погрешности.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Поправка равна оцененной систематической погрешности, взятой с обратным знаком.

2 Так как систематическая погрешность не может быть известна точно, компенсация не может быть полной.

В.2.24 Поправочный коэффициент [VIM 3.16] -
числовой коэффициент, на который умножают неисправленный результат измерения для компенсации систематической погрешности.

ПРИМЕЧАНИЕ - Так как систематическая погрешность не может быть точно известна, компенсация не может быть полной.

Приложение С

Основные статистические термины и понятия

С.1 Источник определений

Определения основных статистических терминов, приведенных в этом Приложении, взяты из Международного стандарта ИСО 3534-1 [7], который должен быть основополагающим источником для определения терминов, не включенных в данный текст. Некоторые из этих терминов и лежащие в их основе понятия подробно рассматриваются в С.3; а в разделе С.2, для более удобного пользования этим *Руководством*, приведены их формальные определения. Однако определения некоторых терминов, связанных с основными и включенных в С.3, не основаны непосредственно на стандарте ИСО 3534-1.

С.2 Определения

Как и в разделе 2 и приложении В, заключение некоторых слов у терминов в скобки означает, что эти слова могут быть опущены, если это не приведет к путанице.

Определения терминов С.2.1-С.2.14 даны в понятиях свойств совокупностей. Определения терминов С.2.15 - С.2.31 относятся к ряду наблюдений (см. [7]).

С.2.1 Вероятность [ИСО 3534-1, 1.1] - действительное число в интервале от 0 до 1, приписываемое случайному событию.

ПРИМЕЧАНИЕ - Его можно отнести к долговременной относительной частоте события или к степени уверенности, что событие произойдет. При высокой степени уверенности, вероятность близка к 1.

С.2.2 Случайная переменная величина; переменная [ИСО 3534-1, 1.2] - переменная величина, которая может принимать любое значение из указанного ряда величин и с которой связано *распределение вероятностей* ([ИСО 3534-1] 1.3 [С.2.3]).

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Случайная переменная величина, которая может принимать только отдельные значения, называется "дискретной". Случайная переменная величина, которая может принимать любое значение в пределах конечного или бесконечного интервала, называется "непрерывной".

2 Вероятность события А обозначается Pr(A) или *P*(A).

Пояснение к *Руководству*: Обозначение Pr(A) применяется в данном *Руководстве* вместо обозначения P_r(A), которое используется в ИСО 3534-1.

С.2.3 Распределения вероятностей (случайной переменной величины) [ИСО 3534-1, 1.3] -
функция, определяющая вероятность того, что случайная величина принимает любое заданное значение или принадлежит к заданному ряду значений.

ПРИМЕЧАНИЕ - Вероятность всего ряда значений случайной переменной равна 1.

С.2.4 Функция распределения [ИСО 3534-1, 1.4] -
функция, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X меньше или равна x:

$$F(x)=\Pr(X\leq x).$$

С.2.5 Функция плотности вероятностей (для непрерывной случайной переменной) [ИСО 3534-1, 1.5] -
производная (если она существует) функции распределения:

$$f(x)=\mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x.$$

ПРИМЕЧАНИЕ - $f(x)\mathrm{d}x$ это "элемент вероятности":

$$f(x)\mathrm{d}x=\Pr(x<X<x+\mathrm{d}x).$$

С.2.6 Функция вероятностной меры [ИСО 3534-1, 1.6] -
функция, определяющая для каждого значения x_i дискретной случайной переменной X вероятность p_i того, что случайная величина равна x_i:

$$p_i=\Pr(X=x_i).$$

С.2.7 Параметр [ИСО 3534-1, 1.12] -
величина, используемая в описании распределения вероятностей случайной переменной.

С.2.8 Корреляция [ИСО 3534-1, 1.13] -
связь между двумя или несколькими случайными переменными в пределах распределения двух или более случайных переменных величин.

ПРИМЕЧАНИЕ - Большинство статистических мер корреляции оценивают только степень линейной связи.

С.2.9 Ожидание (случайной переменной или распределения вероятностей); **ожидаемое значение, среднее значение** [ИСО 3435-1, 1.18] -

1 Для дискретной случайной переменной X, принимающей значения x_i с вероятностью p_i, ожидаемое значение, если оно существует, составляет

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i \ ,$$

причем суммирование происходит по всем значениям x_i, которые может принимать X.

2 Для непрерывной случайной переменной X, имеющей функцию плотности вероятностей $f(x)$, ожидаемое значение, если оно существует, составляет

$$\mu = E(X) = \int x f(x) dx \ ,$$

причем интегрирование происходит по всему интервалу (интервалам) изменения X.

С.2.10 Центрированная случайная переменная [ИСО 3435-1, 1.21] -
случайная величина, ожидаемое значение которой равно нулю.

ПРИМЕЧАНИЕ - Если случайная переменная X имеет ожидаемое значение, равное μ, соответствующая центрированная случайная переменная-это $(X-\mu)$.

С.2.11 Дисперсия (случайной переменной или распределения вероятностей) [ИСО 3534-1, 1.22] -
ожидаемое значение квадрата *центрированной случайной переменной* ([ИСО 3534-1] 1.21 [С.2.10]):

$$\sigma^2 = V(X) = E\left\{[X - E(X)]^2\right\}.$$

С.2.12 Стандартное отклонение (случайной переменной или распределения вероятностей) [ИСО 3534-1, 1.23] - положительный квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} \ .$$

С.2.13 Центральный момент[1] порядка q [ИСО 3534-1, 1.28] -
При одномерном распределении ожидаемое значение q-ой степени центрированной случайной переменной $(X-\mu)$ составляет:

$$E[(X-\mu)^q].$$

ПРИМЕЧАНИЕ - Центральный момент второго порядка представляет собой *дисперсию* ([ИСО 3534-1] 1.22 [С.2.11]) случайной переменной X.

[1] Если в определении моментов величины X, $X-a$, Y, $Y-b$, и т.д. заменить на их абсолютные величины, т.е. $|X|$, $|X-a|$, $|Y|$, $|Y-b|$ и т.д., то будут определены другие

моменты, называемые "абсолютными моментами".

C.2.14 Нормальное распределение; распределение Лапласа-Гаусса [ИСО 3534-1, 1.37] -
распределение вероятностей непрерывной случайной переменной *X*, функция плотности вероятностей которой равна:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right],$$

где $-\infty<x<+\infty$.

ПРИМЕЧАНИЕ - μ - ожидаемое значение и σ - стандартное отклонение нормального распределения.

C.2.15 Характеристика [ИСО 3534-1, 2.2] -
свойство, которое помогает идентифицировать или различать отдельные объекты данной совокупности.

ПРИМЕЧАНИЕ - Характеристика может быть количественной (выражена через переменные величины) или качественной (выражена через свойства элементов совокупности).

C.2.16 Совокупность [ИСО 3534-1, 2.3] -
множество рассматриваемых объектов.

ПРИМЕЧАНИЕ - Для случайной переменной *распределение вероятностей* ([ИСО 3534-1 1.3 [C.2.3]) рассматривается как определяющее совокупность этой переменной.

C.2.17 Частота [ИСО 3534-1, 2.11] -
число случаев данного типа событий или число наблюдений, попадающих в определенную группу.

C.2.18 Частотное распределение [ИСО 3534-1, 2.15] -
эмпирическое соотношение между значениями характеристики и их частотами или относительными частотами.

ПРИМЕЧАНИЕ - Распределение может быть графически представлено в виде *гистограммы* ([ИСО 3534-1] 2.17), *столбцовой диаграммы* ([ИСО 3534-1] 2.18), *графика накопленной частоты* ([ИСО 3534-1] 2.19), или *прямоугольной таблицы* ([ИСО 3534-1] 2.22).

C.2.19 Среднее арифметическое; среднее значение [ИСО 3534-1, 2.26] -
сумма значений, деленная на их число.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Термин "среднее арифметическое" обычно применяется, когда речь идет о параметре совокупности, а термин "среднее значение" - когда речь идет о результате вычисления по данным, полученным в выборке.

2 Среднее значение простой случайной выборки, взятой из совокупности, представляет собой несмещенную оценку среднего арифметического этой совокупности. Однако иногда применяются и другие оценки, такие как среднее геометрическое или гармоническое, медиана или мода.

C.2.20 Дисперсия [ИСО 3534-1, 2.33] -
мера рассеяния, которая представляет собой сумму возведенных в квадрат отклонений наблюдаемых значений от их среднего значения, деленную на число, на единицу меньшее, чем число наблюдений.

ПРИМЕР - Для *n* наблюдений $x_1, x_2,..., x_n$ со средним значением

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

дисперсия составляет

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2 .$$

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Дисперсия выборки представляет собой несмещенную оценку дисперсии совокупности.

2 Дисперсия представляет собой центральный момент второго порядка, умноженный на $n/(n-1)$ (см. примечание к [ИСО 3534-1] 2.39).

Пояснение к *Руководству*: Дисперсия, определение которой приводится здесь, более точно определена как "выборочная оценка дисперсии совокупности". Дисперсия выборки обычно определяется как центральный момент второго порядка выборки (см. С.2.13 и С.2.22).

С.2.21 Стандартное отклонение [ИСО 3534-1, 2.34] -
положительный квадратный корень из дисперсии.

ПРИМЕЧАНИЕ - Стандартное отклонение выборки представляет собой смещенную оценку стандартного отклонения совокупности.

С.2.22 Центральный момент порядка *q* [ИСО 3534-1, 2.37] -
в распределении одномерной характеристики среднее арифметическое значение q-ой степени разности между наблюдаемыми значениями и их средним значением $\bar{x}$ составляет:

$$\frac{1}{n}\sum_{i}(x_i - \bar{x})^q ,$$

где n число наблюдений.

Примечание - Центральный момент порядка 1 равен нулю.

С.2.23 Статистика [ИСО 3534-1, 2.49]-
функция выборки случайных переменных.

ПРИМЕЧАНИЕ - Статистика, как функция случайных переменных, также является случайной величиной и в качестве таковой принимает различные значения от выборки к выборке. Значение статистики, полученное путем использования наблюдаемых величин в этой функции, может быть использовано при статистической проверке или в качестве оценки параметра совокупности, такого как среднее значение или стандартное отклонение.

С.2.24 Оценивание [ИСО 3534-1, 2.49]-
операция приписывания, на основании наблюдений в выборке, числовых значений параметрам распределения, выбранного в качестве статистической модели совокупности, из которой взята эта выборка.

ПРИМЕЧАНИЕ - Результат этой операции может быть выражен как единственное значение (точечная оценка; см. [ИСО 3534-1] 2.51 [С.2.26]) или как интервальная оценка (см. [ИСО 3534-1] 2.57 [С.2.27] и 2.58 [С.2.28]).

С.2.25 Оценка [ИСО 3534-1, 2.50] -
статистика, используемая для оценивания параметра совокупности.

С.2.26 Значение оценки [ИСО 3534-1, 2.51] -
значение статистики, полученное в результате оценивания.

С.2.27 Двусторонний доверительный интервал [ИСО 3534-1, 2.57] -
Если T_1 и T_2 - это две функции наблюдаемых значений, а θ - параметр совокупности, подлежащий оценке, вероятность $\Pr(T_1 \leq \theta \leq T_2)$ по крайней мере равна $(1-\alpha)$ [где $(1-\alpha)$ - фиксированное число, положительное и меньшее единицы], то интервал между T_1 и T_2 представляет собой двухсторонний $(1-\alpha)$ доверительный интервал для θ.

ПРИМЕЧАНИЯ

1 Границы T_1 и T_2 доверительного интервала являются статистиками ([ISO 3534-1] 2.45 [С.2.23]) и в качестве таковых обычно принимают различные значения от выборки к выборке.

2 В больших сериях выборок относительная частота случаев, когда истинное значение параметра совокупности θ накрывается доверительным интервалом, больше либо равна $(1-\alpha)$.

С.2.28 Односторонний доверительный интервал [ISO 3534-1, 2.58] -
Если T является функцией наблюдаемых значений, а θ - параметр совокупности, подлежащий определению, вероятность $\Pr(T \geq \theta)$ [или вероятность $\Pr(T \leq \theta)$] по крайней мере равна $(1-\alpha)$ [где $(1-\alpha)$ - фиксированное число, по-

ложительное и меньшее единицы], то интервал от наименьшего возможного значения θ до T (или интервал от T до наибольшего возможного значения θ) является односторонним $(1-\alpha)$ доверительным интервалом для θ.

ПРИМЕЧАНИЯ

1 Граница T доверительного интервала является *статистикой* ([ISO 3534-1] 2.45 [C.2.23]) и в качестве таковой будет, как правило, принимать различные значения от выборки к выборке.

2 См. Примечание 2 [ISO 3534-1] 2.57 [C.2.27].

C.2.29 Коэффициент доверия; доверительный уровень [ISO 3534-1, 2.59] - значение $(1-\alpha)$ вероятности, связанное с доверительным интервалом или статистическим интервалом охвата (см. [ISO 3534-1 2.57 [C.2.27], 2.58 [C.2.28] и 2.61 [C.2.30]).

ПРИМЕЧАНИЕ - $(1-\alpha)$ часто выражается в процентах.

C.2.30 Статистический интервал охвата [ISO 3534-1, 2.61] -
интервал, для которого можно с заданным доверительным уровнем констатировать, что он включает, по крайней мере, определенную часть совокупности.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Если обе границы определяются статистиками, интервал является двусторонним. Если одна из двух границ не является конечной или представляет собой граничное значение переменной величины, интервал является односторонним.

2 Его называют также "статистически допустимый интервал". Такой термин не следует использовать, так как это может вызвать путаницу с "допустимым интервалом", определенным в ISO 3534-2.

C.2.31 Степени свободы [ISO 3534-1, 2.85] -
обычно число членов в сумме минус число ограничений на члены суммы.

C.3 Расшифровка терминов и понятий

C.3.1 Ожидание

Ожидание функции $g(z)$ от случайной переменной z с плотностью распределения вероятностей $p(z)$ определяется уравнением

$$E[g(z)] = \int g(z)p(z)dz ,$$

где из определения $p(z)$ следует, что $\int p(z)\mathrm{d}z = 1$. Ожидание случайной переменной z, обозначаемое через μ_z, которое также называется ожидаемая величина или среднее значение z, определяется по формуле

$$\mu_z \equiv E(z) = \int zp(z)dz .$$

Оно оценивается статистически через $\bar{z}$ - среднее арифметическое значение или среднее из n независимых наблюдений z_i случайной переменной z, плотность распределения вероятностей которой $p(z)$:

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i .$$

C.3.2 Дисперсия

Дисперсия случайной переменной представляет собой ожидаемое значение квадратичного отклонения от ее ожидания. Таким образом, дисперсия случайной переменной z с плотностью распределения вероятностей $p(z)$ определяется по формуле

$$\sigma^2(z) = \int (z-\mu_z)^2 p(z)dz ,$$

где μ_z - ожидаемое значение z. Дисперсия $\sigma^2(z)$ может быть оценена по формуле

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2 , \text{ где } \bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

и z_i - n независимых наблюдений z.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Множитель $n-1$ в выражении для $s^2(z_i)$ обусловлен корреляцией между z_i и $\bar{z}$ и отражает тот факт, что есть только $n-1$ независимых членов в множестве $\{z_i-\bar{z}\}$.

2 Если ожидание μ_z известно, то дисперсия может быть оценена по формуле

$$s^2(z_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\mu_z)^2 .$$

Дисперсия среднего арифметического или среднего наблюдений, в отличие от дисперсии индивидуальных наблюдений, является надлежащей мерой неопределенности результата измерения. Дисперсию переменной z следует старательно отличать от дисперсии среднего $\bar{z}$. Дисперсия среднего арифметического рядов n независимых наблюдений z_i определяется по уравнению $\sigma^2(\bar{z})=\sigma^2(z_i)/n$ и оценивается через экспериментально полученную дисперсию среднего значения:

$$s^2(\bar{z})=\frac{s^2(z_i)}{n}=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2 .$$

С.3.3 Стандартное отклонение

Стандартное отклонение представляет собой положительный квадратный корень из дисперсии. Так как стандартную неопределенность, оцениваемую по типу А, получают, беря квадратный корень из статистически оцененной дисперсии, часто более удобно при определении стандартной неопределенности, оцениваемой по типу В, оценивать сначала нестатистический эквивалент стандартного отклонения, а затем, для получения эквивалента дисперсии - возводить в квадрат это стандартное отклонение.

С.3.4 Ковариация

Ковариация двух случайных переменных является мерой их взаимной зависимости. Ковариация случайных переменных y и z определяется по формуле:

$$\mathrm{cov}(y,z)=\mathrm{cov}(z,y)=E\{[y-E(y)][z-E(z)]\} ,$$

откуда следует, что

$$\mathrm{cov}(y,z)=\mathrm{cov}(z,y)= \\ =\iint(y-\mu_y)(z-\mu_z)p(y,z)dydz= \\ =\iint yzp(y,z)dydz-\mu_y\mu_z ,$$

где $p(y, z)$ - совместная функция плотности распределения вероятностей двух случайных переменных y и z. Ковариация $\mathrm{cov}(y, z)$ [обозначаемая также $v(y, z)$] может быть оценена с помощью $s(y_i, z_i)$, полученной из n независимых пар y_i и z_i одновременных наблюдений y и z:

$$s(y_i,z_i)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(z_i-\bar{z}) ,$$

где

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i \quad \text{и} \quad \bar{z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i .$$

ПРИМЕЧАНИЕ - Оцененная ковариация двух средних значений $\bar{y}$ и $\bar{z}$ определяется как $s(\bar{y},\bar{z})=s(y_i,z_i)/n$.

С.3.5 Ковариационная матрица

При многомерном распределении вероятностей матрица V с элементами, равными дисперсиям и ковариациям случайных переменных, называется ковариационной матрицей. Диагональные элементы $v(z,z)\equiv\sigma^2(z)$ или $s(z_i,z_i)\equiv s^2(z_i)$ являются дисперсиями, а недиагональные элементы $v(y, z)$ или $s(y_i, z_i)$ являются ковариациями.

С.3.6 Коэффициент корреляции

Коэффициент корреляции является мерой относительной взаимной зависимости двух случайных величин, равной отношению их ковариаций к положительному квадратному корню из произведения их дисперсий. Таким образом,

$$\rho(y,z)=\rho(z,y)=\frac{v(y,z)}{\sqrt{v(y,y)v(z,z)}}=\frac{v(y,z)}{\sigma(y)\sigma(z)}$$

с оценками

$$r(y_i,z_i)=r(z_i,y_i)=\frac{s(y_i,z_i)}{\sqrt{s(y_i,y_i)s(z_i,z_i)}}=\frac{s(y_i,z_i)}{s(y_i)s(z_i)}$$

Коэффициент корреляции является просто числом, таким что $-1 \le \rho \le +1$ или $-1 \le r(y_i, z_i) \le +1$.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 Так как ρ и r являются просто числами в диапазоне от -1 до $+1$ включительно, а ковариации, как правило, представляют собой величины с неудобной физической размерностью и амплитудой, коэффициенты корреляции обычно более употребительны, чем ковариации.

2 Для многомерного распределения вероятностей вместо ковариационной матрицы обычно применяется матрица коэффициентов корреляции. Так как $\rho(y, y)=1$ и $r(y_i, y_i)=1$, диагональные элементы этой матрицы равны единице.

3 Если входные оценки x_i и x_j коррелированы (см. 5.2.2) и если изменение δ_i в x_i вызывает изменение δ_j в x_j, то коэффициент корреляции, связанный с x_i и x_j, оценивается приблизительно как

$$r(x_i, x_j) \approx u(x_i)\delta_j / u(x_j)\delta_i.$$

Это соотношение может служить основой для экспериментального оценивания коэффициента корреляции. Оно может быть также использовано для приблизительного расчета изменения в одной из входных оценок, обусловленного изменением в другой, если их коэффициент корреляции известен.

C.3.7 Независимость

Две случайные переменные являются статистически независимыми, если их совместное распределение вероятно стей является произведением их индивидуальных распределений вероятностей.

ПРИМЕЧАНИЕ - Если две случайные переменные независимы, их ковариация и коэффициент корреляции являются нулевыми, но обратное утверждение не обязательно верно.

C.3.8 *t*-распределение; распределение Стьюдента

t-распределение или распределение Стьюдента представляет собой распределение вероятностей непрерывной случайной величины t, функция плотности распределения вероятностей которой составляет

$$p(t,v)=\frac{1}{\sqrt{\pi v}}\frac{\Gamma\left[\frac{v+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{v}{2}\right]}\left[1+\frac{t^2}{v}\right]^{-(v+1)/2}$$

$$-\infty < t < +\infty,$$

где Γ есть гамма - функция и $v > 0$. Ожидание *t*-распределения равно нулю, а его дисперсия равна $v/(v-2)$ для $v > 2$. При $v \to \infty$, *t*-распределение стремится к нормальному распределению с $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ (см. С.2.14).

Распределение вероятностей переменной $(\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$ представляет собой *t*-распределение, если случайная величина z распределена нормально с ожиданием μ_z, где $\bar{z}$ - среднее арифметическое n независимых наблюдений z_i величины z; $s(z_i)$ - экспериментальное стандартное отклонение n наблюдений, а $s(\bar{z})=s(z_i)/\sqrt{n}$ - экспериментальное стандартное отклонение среднего $\bar{z}$ с $v = n - 1$ степенями свободы.

Приложение D

"Истинное" значение, погрешность и неопределенность

Термин **истинное значение** (B.2.3) традиционно использовался в публикациях, посвященных неопределенности, однако в данном *Руководстве* в силу причин, изложенных в этом Приложении, этот термин не применяется. Так как термины "измеряемая величина", "погрешность" и "неопределенность" часто понимаются неправильно, в данном Приложении в дополнение к сведениям, приведенным в разделе 3, содержится обсуждение идей, лежащих в основе этих терминов. Чтобы проиллюстрировать, почему понятие неопределенности, принятое в данном *Руководстве*, основано на результате измерения и его оцененной неопределенности, а не на непознаваемых величинах - "истинном" значении и погрешности приведены два рисунка.

D.1 Измеряемая величина

D.1.1 Первым шагом при проведении измерения является определение измеряемой величины - т.е. величины, которую предстоит измерить; измеряемая величина не может быть определена значением, а только путем описания величины. Однако, в принципе, измеряемая величина может быть *полностью* описана только при неограниченном количестве информации. Таким образом, до той степени, в которой оно дает поле для интерпретации, неполное определение измеряемой величины вносит в неопределенность результата измерения составляющую, которая может быть, а может и не быть значимой по сравнению с точностью, требуемой от измерения.

D.1.2 Обычно определение измеряемой величины уточняют некоторые физические состояния и условия.

ПРИМЕР - Скорость звука в сухом воздухе, состоящем из N_2 = 0,7808, O_2 = 0,2095, Ar = 0,00935 и CO_2 = 0,00035 (молярная доля), при температуре T = 273,15 K и давлении p = 101325 Pa.

D.2 Реализованная величина

D.2.1 В идеальном случае - величина, реализованная при измерении, должна быть полностью согласована с определением измеряемой величины. Часто, однако, такая величина не может быть реализована, и тогда осуществляется измерение величины, которая является лишь аппроксимацией измеряемой величины.

D.3 "Истинное" значение и исправленное значение

D.3.1 В результат измерения реализованной величины вносится поправка на различие между ней и измеряемой величиной, чтобы определить, каким бы был результат измерения, если бы реализованная величина действительно полностью удовлетворяла бы определению измеряемой величины. В результат измерения реализованной величины вносятся также поправки на все другие известные значимые систематические эффекты. Хотя окончательный исправленный результат иногда рассматривается как наилучшая оценка "истинного" значения измеряемой величины, в действительности, этот результат просто является наилучшей оценкой значения величины, предназначенной для измерения.

D.3.2 В качестве примера предположим, что измеряемой величиной является толщина данного листа материала при заданной температуре. Образец доводится до температуры, близкой к заданной, и его толщина измеряется в определенном месте с помощью микрометра. Толщина материала в этом месте и при этой температуре, при давлении, оказываемом микрометром - представляет собой реализованную величину.

D.3.3 Температура материала в момент измерения и приложенное давление - определяются. Неисправленный результат измерения реализованной величины затем корректируется путем учета: калибровочной кривой микрометра, отклонения температуры образца от заданной температуры, а также небольшого сжатия образца от приложенного давления.

D.3.4 Исправленный результат может быть назван наилучшей оценкой "истинного" значения; "истинного" в том смысле, что оно является значением величины, которая принимается за величину, полностью удовлетворяющую определению измеряемой величины; но если бы микрометр был приложен к другой части листа материала, реализованная величина была бы другой, с другим "истинным" значением. Однако это "истинное" значение также соответствовало бы определению измеряемой величины, так как в нем не уточняется - должна ли быть толщина определена в конкретном месте листа. Следовательно, в этом случае из-за неполного определения измеряемой величины "истинное" значение имеет неопределенность, которая может быть оценена по измерениям, выполненным в различных точках листа. На некотором уровне каждая измеряемая величина имеет такую "собственную" неопределенность, которая, в принципе, может быть оценена тем или иным способом. Она является минимальной неопределенностью, с которой может быть определена измеряемая величина, и каждое измерение, при котором достигается такая неопределенность, может рассматриваться как наилучшее возможное измерение измеряемой величины. Для получения значения рассматриваемой величины, имеющей меньшую неопределенность, необходимо, чтобы измеряемая величина имела более полное определение.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 В рассмотренном примере определение измеряемой величины оставляет без внимания много других параметров, которые, возможно, могли бы повлиять на толщину: атмосферное давление, влажность, положение листа в гравитационном поле, способ, которым он закреплен, и т.д.

2 Хотя измеряемая величина должна быть определена достаточно подробно, чтобы любая неопределенность, обусловленная неполнотой ее определения, была пренебрежимо малой по сравнению с требуемой точностью измерения, следует признать, что это не всегда будет практично. Определение может, например, быть неполным, т.к. оно не уточняет параметры, которые, по неоправданному предположению, могут иметь пренебрежимо малое влияние; или это определение может включать условия, которые никогда полностью не выполняются и неполное воспроизведение которых трудно учесть. В примере, приведенном в D.1.2, скорость звука предполагает бесконечные плоские волны исчезающе малой амплитуды. С учетом того, что измерение не соответствует этим условиям, должны быть приняты во внимание дифракция и нелинейные эффекты.

3 Неадекватное определение измеряемой величины может привести к несоответствию между результатами измерений одной и той же величины, проводившихся в различных лабораториях.

D.3.5 Термин "истинное значение измеряемой величины" или величины (часто сокращаемое до "истинного значения") не применяется в данном *Руководстве* , т.к. слово "истинное" рассматривается как избыточное. Термин "измеряемая величина" (см. В.2.9) означает "данная величина, подлежащая измерению". Следовательно, термин "значение измеряемой величины" означает "значение данной величины, подлежащей измерению". Так как под термином "данная величина" в общепринятой практике подразумевается определенная или конкретная величина (см. В.2.1, Примечание 1), то прилагательное "истинное" в термине "истинное значение измеряемой величины" (или в термине "истинное значение величины") не является необходимым - "истинное" значение измеряемой величины (или величины) просто является значением измеряемой величины (или величины). Кроме того, как отмечалось ранее, единственное "истинное" значение является идеализированным понятием.

D.4 Погрешность

Исправленный результат измерения не является значением измеряемой величины - т.е. он с погрешностью - из-за несовершенного измерения реализованной величины, обусловленного: случайными изменениями наблюдений (случайные эффекты), неточным определением поправок на систематические эффекты и неполным знанием некоторых физических явлений (также систематические эффекты). Ни значение реализованной величины, ни значение измеряемой величины не могут быть когда - либо известны точно; все, что может быть известно - это их оцененные значения. В приведенном выше примере измеряемая толщина листа *может* быть ошибочна, т.е. может отличаться от измеряемой величины (толщины листа), т.к. каждый из следующих эффектов может привести к неизвестной погрешности в результате измерения:

a) небольшие расхождения между показаниями микрометра, когда он неоднократно применяется для той же самой реализованной величины;
b) несовершенная калибровка микрометра;
c) несовершенное измерение температуры и приложенного давления;
d) неполное знание о влиянии температуры, атмосферного давления и влажности на образец или микрометр, или и на то, и на другое.

D.5 Неопределенность

D.5.1 Поскольку точные значения составляющих погрешности результата измерения неизвестны и непознаваемы, то *неопределенности*, связанные со случайными и систематическими эффектами, которые приводят к погрешности, могут быть оценены. Но, даже если оцененные неопределенности незначительны, нет еще никакой гарантии, что погрешность результата измерения будет незначительной, так как при определении поправки или в оценке неполноты знания систематический эффект может не учитываться, поскольку он не распознается. Таким образом, неопределенность результата измерения не обязательно является указанием на правдоподобность того, что результат измерения близок к значению измеряемой величины; это просто оценка правдоподобия близости к наилучшему значению, которое соответствует имеющимся сейчас знаниям.

D.5.2 Неопределенность измерения, следовательно, выражает тот факт, что для данной измеряемой величины и для данного результата ее измерения нет единственного значения, а есть бесконечное число значений, рассеянных вокруг результата, который согласуется со всеми наблюдениями и данными, а также со знанием физического мира и который с различной степенью уверенности может быть приписан измеряемой величине.

D.5.3 К счастью, в большинстве практических измерительных ситуаций многое из обсуждавшегося в данном Приложении не применяется. Примерами могут служить случаи, когда измеряемая величина достаточно хорошо определена; когда эталоны или приборы калибруются с помощью хорошо изученных эталонов сравнения, которые согласованы с национальными эталонами; и когда неопределенности калибровочных поправок незначительны по сравнению с неопределенностями, обусловленными случайными влияниями на показания приборов или ограниченным числом наблюдений (см. Е.4.3). Тем не менее, неполное знание влияющих величин и их эффектов часто вносит значительный вклад в неопределенность результата измерения.

D.6 Графическое представление

D.6.1 Рисунок D.1 иллюстрирует некоторые идеи, обсуждавшиеся в разделе 3 *Руководства* и в этом Приложении. Из этого рисунка ясно, почему основное внимание в *Руководстве* сконцентрировано на неопределенности, а не на погрешности. Точное значение погрешности результата измерения, как правило, неизвестно и непознаваемо. Все, что можно сделать - это оценить значения входных величин, включая поправки на известные систематические эффекты вместе, с их стандартными неопределенностями (оцененными стандартными отклонениями), обусловленными как неизвестными распределениями вероятностей, выборки для которых получают путем повторных наблюдений, так и субъективными или *априорными* распределениями, основанными на всей имеющейся информации; а затем рассчитать результат измерения по оцененным значениям входных величин и суммарную стандартную неопределенность этого результата - по стандартным неопределенностям этих оцененных значений. Только в случае, если есть твердая уверенность в том, что все эти операции были выполнены правильно и все значимые систематические эффекты были учтены, можно предположить, что результат измерения является надежной оценкой измеряемой величины и что его суммарная стандартная неопределенность является надежной мерой ее *возможной* погрешности.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 На рис. D.1a наблюдения для большей наглядности представлены в виде гистограммы (см. 4.4.3 и Рис. 1b).

2 Поправка на погрешность равна оценке погрешности, взятой с обратным знаком. Таким образом, на рис. D.1 и D.2 стрелка, иллюстрирующая поправку на погрешность, равна по длине, но направлена в противоположном направлении по отношению к стрелке, которая должна была бы иллюстрировать саму погрешность, и наоборот. В текстовых пояснениях к рисунку указывается - иллюстрирует ли данная стрелка поправку или погрешность.

D.6.2 На рис. D.2 те же самые понятия, графически изображенные на рис. D.1, представлены в несколько ином виде. Более того, на рис. D.2 проиллюстрировано, что может быть много значений измеряемой величины, если определение измеряемой величины является неполным (подпункт *g* рисунка). Неопределенность, обусловленная этой неполнотой определения, выраженная как дисперсия, оценивается на основании результатов измерений, полученных при множественных реализациях измеряемой величины с использованием одного и того же метода, приборов и т.д. (см. D.3.4).

ПРИМЕЧАНИЕ - В столбце, обозначенном "Дисперсия", под дисперсиями понимаются дисперсии $u^2_i(y)$, определенные уравнением (11) в п.5.1.3; следовательно, они суммируются линейно, как показано на рисунке.

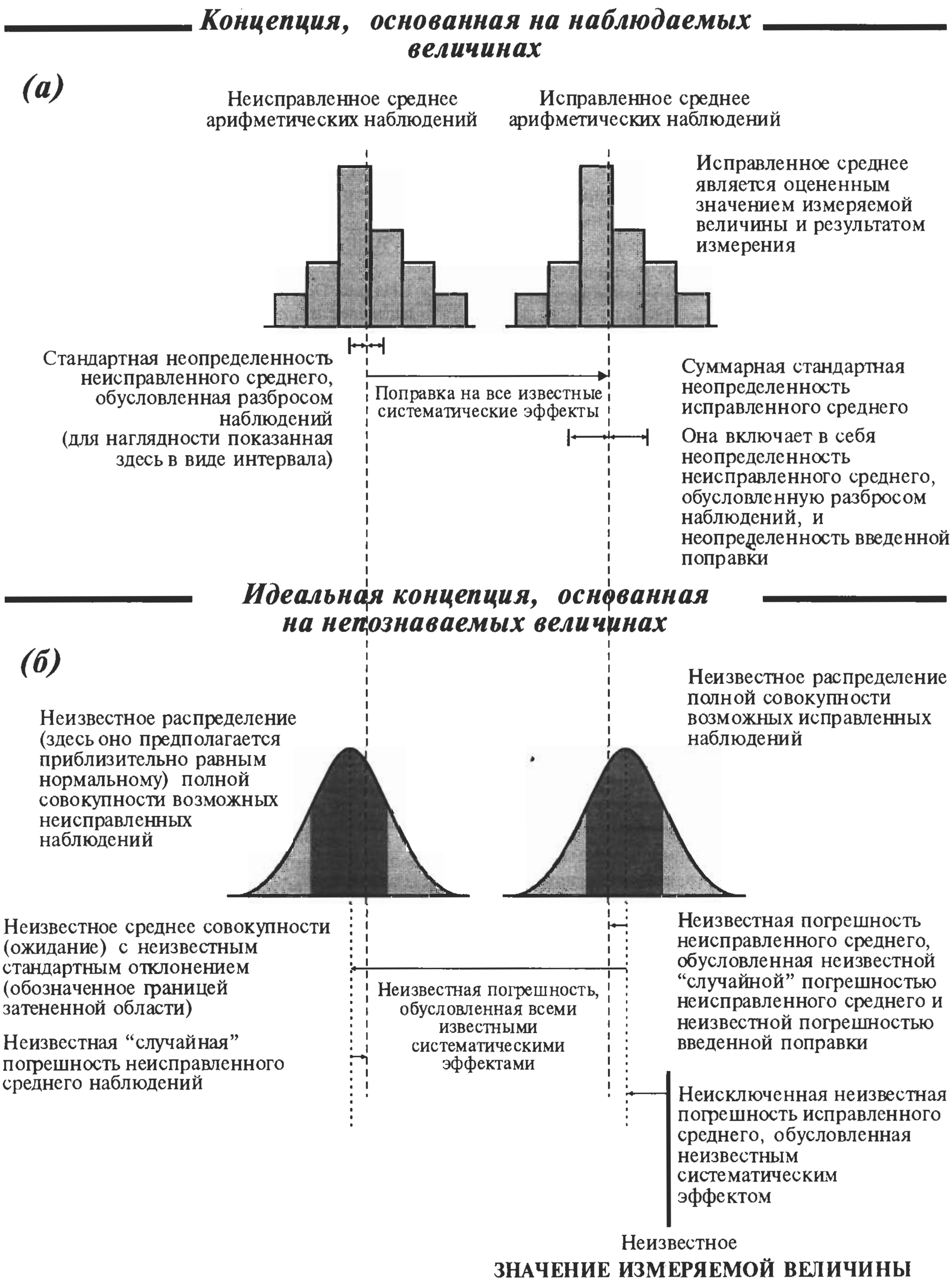

Рисунок D.1. Графическая иллюстрация значения, погрешности и неопределенности

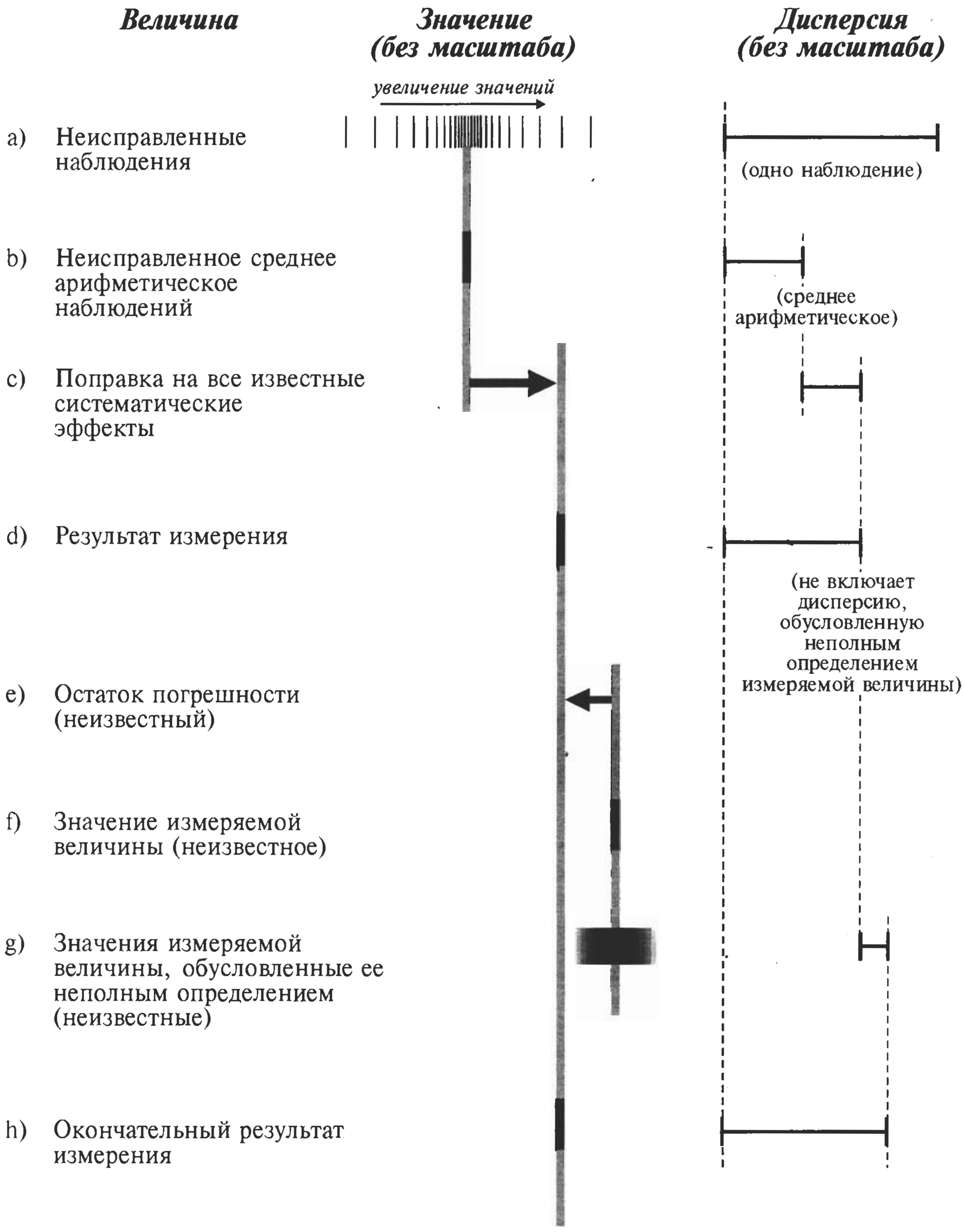

Рисунок D.2. Графическая иллюстрация значений, погрешности и неопределенности

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

МОТИВАЦИЯ И ОСНОВАНИЕ ДЛЯ РЕКОМЕНДАЦИИ INC-1 (1980)

Данное Приложение дает краткое описание как мотивации, так и статистической основы для Рекомендации INC-1 (1980) Рабочей группы по составлению отчета о неопределенностях, на которую опирается данное *Руководство*. Подробнее смотри в [1, 2, 11, 12].

Е.1. "Безопасная", "случайная" и "систематическая"

Е.1.1 Данное *Руководство* представляет широко применяемый метод оценивания и выражения неопределенности в измерении. Оно дает скорее реалистическое, чем "безопасное" значение неопределенности, основанное на концепции о том, что не существует врожденных различий между составляющими неопределенности, возникающими из случайного эффекта и из поправки на систематический эффект (см. 3.2.2 и 3.2.3). Поэтому данный метод находится в противоречии к определенным более старым методам, которые имели в общей основе две следующие идеи.

Е.1.2 Первая идея заключается в том, что сообщаемая неопределенность должна быть "безопасной" или "консервативной", имея в виду, что она никогда не должна слишком занижаться. Действительно, поскольку оценивание неопределенности результата измерения проблематично, часто ее преднамеренно увеличивали.

Е.1.3 Вторая идея заключается в том, что влияния, которые дают увеличение неопределенности, всегда принимались как или "случайные", или "систематические", будучи различной природы происхождения; неопределенности, связанные с каждым из них, должны были суммироваться своим способом и сообщаться отдельно друг от друга (или суммироваться определенным образом, если требовалось одно число). Фактически способ суммирования неопределенностей часто выбирался так, чтобы удовлетворить требованию безопасности.

Е.2 Оправдание реалистическому оцениванию неопределенности

Е.2.1 При указании значения измеряемой величины необходимо давать ее наилучшую оценку и наилучшее оценивание неопределенности этой оценки, поскольку, если неопределенность должна отклоняться от истины, обычно невозможно решить, в каком направлении отклонение будет "безопасным". Приуменьшение неопределенностей может привести к тому, что сообщаемым значениям будет придаваться слишком большое доверие, что иногда может привести к путанице или даже иметь катастрофические последствия. Преднамеренное завышение неопределенностей также может иметь нежелательный отклик. Это может вынудить пользователей измерительной аппаратуры покупать приборы более дорогие, чем им нужно, или привести к ненужному отказу от дорогих товаров или к отказу от услуг калибровочной лаборатории.

Е.2.2 Нельзя сказать, что те, кто используют результат измерения, не могут применить свой собственный множитель к указанной неопределенности для того, чтобы получить расширенную неопределенность, которая определяет интервал, имеющий определенный уровень доверия и удовлетворяет их собственные нужды, или что, в определенных обстоятельствах, учреждения, выдающие результат измерения, не могут в установленном порядке применить коэффициент, который дает подобную расширенную неопределенность, соответствующую нуждам конкретного круга пользователей их результатов. Однако такие множители (которые всегда должны указываться) должны применяться к неопределенности, полученной реалистическим методом, и только *после того*, как неопределенность была получена таким образом, чтобы интервал, заданный с помощью расширенной неопределенности, имел требуемый уровень доверия и операция могла быть легко повторена.

Е.2.3 Те, кто занимаются измерениями, часто должны включать в свой анализ результаты измерений, полученные другими, причем каждый из этих других результатов имеет свою собственную неопределенность. При оценивании неопределенности их собственного результата измерения им нужно иметь наилучшее, а не "безопасное" значение неопределенности каждого результата, взятого из какого-либо другого источника. Кроме того, должен существовать логичный и простой способ, по которому можно суммировать эти "импортированные" неопределенности с неопределенностями их собственных наблюдений для того, чтобы дать неопределенность своего собственного результата. Рекомендация INC-1 (1980) дает такой способ.

Е.3 Оправдание для одинакового обращения со всеми составляющими неопределенности

В центре внимания этого подраздела лежит простой пример, который демонстрирует, как данное *Руководство* рассматривает составляющие неопределенности, возникающие из случайных эффектов и поправок на систематические эффекты, в точности одним и тем же образом при оценивании неопределенности результата измерения. Таким образом, этот подраздел показывает на примере точку зрения, принятую в этом *Руководстве* и приведенную в Е.1.1, которая заключается в том, что все составляющие неопределенности имеют одинаковую природу и должны рассматриваться идентичным образом. Отправной точкой рассмотрения является упрощенный вывод математического выражения для распространения стандартных отклонений, называемого в этом *Руководстве* законом распространения неопределенности.

Е.3.1 Предположим, что выходная величина $z = f(w_1, w_2,..., w_N)$ зависит от N входных величин $w_1, w_2,..., w_N$, и что каждая w_i описывается соответствующим распределением вероятностей. Разложение f вокруг ожиданий w_i, $E(w_i) \equiv \mu_i$ в ряд Тейлора первого порядка дает для малых отклонений z от μ_z через малые отклонения w_i от μ_i следующее выражение:

$$z - \mu_z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}(w_i - \mu_i), \quad (\text{E.1})$$

где предполагается, что всеми членами более высокого порядка можно пренебречь и $\mu_z = f(\mu_1, \mu_2,..., \mu_N)$. Тогда квадрат отклонения $z - \mu_z$ дается формулой:

$$(z-\mu_z)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}(w_i - \mu_i)\right)^2, \quad (\text{E.2a})$$

ведущей к

$$(z-\mu_z)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial w_i}\right)^2 (w_i - \mu_i)^2 + $$

$$+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}\frac{\partial f}{\partial w_j}(w_i - \mu_i)(w_j - \mu_j). \quad (\text{E.2б})$$

Ожиданием квадрата отклонения $(z-\mu_z)^2$ является дисперсия z, т.е. $E[(z-\mu_z)^2] = \sigma_z^2$, и, таким образом, из уравнения (Е.2б) получаем:

$$\sigma_z^2=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial w_i}\right)^2\sigma_i^2+$$

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial w_i}\frac{\partial f}{\partial w_j}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}\,, \qquad \text{(E.3)}$$

где $E[(w_i-\mu_i)^2]=\sigma_i^2$ - дисперсия w_i, $E[(w_i - \mu_i)(w_j-\mu_j)]=\upsilon(w_i, w_j)$ - ковариация w_i и w_j, а $\rho_{ij} = \upsilon(w_i, w_j)/(\sigma_i^2, \sigma_j^2)^{1/2}$ - коэффициент корреляции w_i и w_j.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1 σ_z^2 и σ_i^2 являются центральными моментами второго порядка (см. С.2.13, С.2.22) распределений вероятностей z и w_i. Распределение вероятностей можно полностью охарактеризовать его ожиданием, дисперсией и центральными моментами более высокого порядка.

2. Уравнение (13) в 5.2.2. [вместе с уравнением (15)], которое используется для расчета суммарной стандартной неопределенности, идентично уравнению (E.3) за исключением того, что уравнение (13) выражается в терминах оценок дисперсий, стандартных отклонений и коэффициентов корреляции.

E.3.2 В традиционной терминологии уравнение (E.3) часто называют "общим законом распространения погрешностей" - название, которое более применимо к выражению в виде $\Delta z = \sum_{i=1}^{N}\left(\partial f/\partial w_i\right)\Delta w_i$, где Δz - изменение в z, обусловленное (малыми) изменениями Δw_i в w_i [см. уравнение (E.8)]. Уравнение (E.3), в действительности, уместно назвать законом распространения неопределенности, как и сделано в этом *Руководстве*, потому что оно показывает, как неопределенности входных величин w_i, взятые равными стандартным отклонениям распределений вероятностей w_i, суммируются для того, чтобы дать неопределенность выходной величины z, если эта неопределенность взята равной стандартному отклонению распределения вероятностей z.

E.3.3 Уравнение (E.3) также применимо к распространению кратных стандартных отклонений, так как если каждое стандартное отклонение σ_i заменяется кратным $k\sigma_i$, где k одинаково для каждого σ_i, то стандартное отклонение выходной величины z заменяется на $k\sigma_z$. Однако оно не подходит для распространения доверительных интервалов. Если каждое σ_i заменить на величину δ_i, которая определяет интервал, соответствующий заданному уровню доверия p, то результирующая величина для z, δ_z, не будет определять интервал, соответствующий тому же значению p, если только все w_i не характеризуются нормальными распределениями. Подобные предположения, рассматривающие нормальность распределений вероятностей величин w_i, не подразумеваются в уравнении (E.3). Точнее, если в уравнении (10) в 5.1.2 каждая стандартная неопределенность $u(x_i)$ оценивается из независимых повторных наблюдений и умножается на t - коэффициент, соответствующий их степеням свободы для конкретного значения p (скажем, p = 95 процентов), то неопределенность оценки y не будет определять интервал, соответствующий тому же значению p (см. G.3 и G.4).

ПРИМЕЧАНИЕ - Требование нормальности при распространении доверительных интервалов с использованием уравнения (E.3) может быть одной из причин для исторического разделения составляющих неопределенности, полученных из повторных наблюдений, которые предполагались нормально распределенными, от составляющих, которые оценивались просто как верхние и нижние границы.

E.3.4 Рассмотрим следующий пример: z зависит только от одной входной величины w, $z = f(w)$, где w оценивается путем усреднения n числа значений w_k для w; эти n значений получены из n независимых повторных наблюдений q_k случайной переменной q; w_k и q_k связаны между собой, как

$$w_k = \alpha + \beta q_k. \qquad \text{(E.4)}$$

Здесь α есть постоянное "систематическое" смещение или сдвиг, общий для каждого наблюдения, а β - общий масштабный коэффициент. Предполагается, что сдвиг и масштабный коэффициент, хотя и постоянные в ходе наблюдений, характеризуются *априорными* распределениями вероятностей, где α и β являются наилучшими оценками ожиданий этих распределений.

Наилучшей оценкой для w является среднее арифметическое или среднее $\overline{w}$, полученное из

$$\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha + \beta q_k\right). \quad \text{(E.5)}$$

Тогда величина z оценивается с помощью $f(\overline{w}) = f(\alpha, \beta, q_1, q_2, ..., q_n)$ и оценка $u^2(z)$ его дисперсии $\sigma^2(z)$ получается из уравнения (E.3). Если предположить для простоты, что $z = w$, так чтобы наилучшая оценка z была $z = f(\overline{w}) = \overline{w}$, то можно легко найти оценку $u^2(z)$. Заметив из уравнения (E.5), что

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1, \frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k = \overline{q} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial q_k} = \frac{\beta}{n},$$

обозначив оцененные дисперсии α и β соответственно как $u^2(\alpha)$ и $u^2(\beta)$ и предположив, что отдельные наблюдения некоррелированы, получим из уравнения (E.3):

$$u^2(z) = u^2(\alpha) + \overline{q}^2 u^2(\beta) + \beta^2 \frac{s^2(q_k)}{n}, \quad \text{(E.6)}$$

где $s^2(q_k)$ - экспериментальная дисперсия наблюдений q_k, вычисленная в соответствии с уравнением (4) в 4.2.2, и $s^2(q_k) / n = s^2(\overline{q})$ - экспериментальная дисперсия среднего $\overline{q}$ (уравнение (5) в 4.2.3).

E.3.5 В традиционной терминологии третий член справа в уравнении (E.6) называется "случайным" вкладом в оцененную дисперсию $u^2(z)$, так как он обычно уменьшается по мере увеличения числа наблюдений n, в то время как два первых члена называются "систематическими" вкладами, так как они не зависят от n.

Более существенно, что в некоторых традиционных рассмотрениях неопределенности измерения уравнение (E.6) является спорным, поскольку не делается различия между неопределенностями, возникающими из-за систематических и случайных эффектов. В частности, суммирование дисперсий, полученных из *априорных* распределений вероятностей, с дисперсиями, полученными из распределений, основанных на частоте, считается нежелательным, поскольку концепция вероятности рассматривается как применимая *только* к событиям, которые могут повторяться много раз при одних и тех же условиях с вероятностью события p ($0 \leq p \leq 1$), показывающей *относительную частоту*, с которой данное событие будет повторяться.

В противовес этой точке зрения существует и другая, равно справедливая точка зрения, состоящая в том, что вероятность является мерой *степени уверенности* в том, что событие произойдет [13, 14]. Например, предположим, что у кого-то есть шанс выиграть небольшую сумму денег D и он является рациональным человеком, заключающим пари. Его степень уверенности в том, что произойдет событие A, составляет $p = 0{,}5$, если он равнодушен к этим двум возможностям выбора: (1) получить D, если событие A произойдет, и ничего не получить, если оно не произойдет; (2) получить D, если событие A не произойдет, и ничего не получить, если оно произойдет. Рекомендация INC-1 (1980), на которую опирается данное *Руководство*, подразумевает эту точку зрения на вероятность, поскольку она рассматривает такие выражения, как уравнение (E.6), как приемлемый способ рассчитать суммарную стандартную неопределенность результата измерения.

E.3.6 Существует три явных преимущества толкования вероятности, базирующейся на степени доверия, стандартном отклонении (стандартной неопределенности) и законе распространения неопределенности [уравнение (Е.3)], как основании для оценивания и выражения неопределенности измерения, как и было сделано в данном *Руководстве*:

а) закон распространения неопределенности позволяет легко ввести суммарную стандартную неопределенность одного результата в оценивание суммарной стандартной неопределенности другого результата, в котором используется первый результат;

б) суммарная стандартная неопределенность может служить основанием для вычисления интервалов, которые реально соответствуют их требуемым уровням доверия; и

в) при оценивании неопределенности нет необходимости классифицировать составляющие на "случайные" или "систематические" (или каким - либо другим образом), поскольку все составляющие неопределенности рассматриваются одним и тем же способом.

Преимущество в) особенно привлекательно, поскольку подобная классификация часто является источником непонимания; составляющая неопределенности не является ни "случайной", ни "систематической". Ее природа определяется использованием соответствующей величины или, более формально, контекстом, в котором эта величина предстает в математической модели, которая описывает измерение. Таким образом, когда соответствующая ей величина используется в другом контексте, "случайная" составляющая может стать "систематической", и наоборот.

Е.3.7 По причине, приведенной выше в в), Рекомендация INC-1 (1980) не классифицирует составляющие неопределенности на "случайные" и "систематические". Действительно, что касается расчета суммарной стандартной неопределенности результата измерения, нет нужды разбивать составляющие неопределенности на классы и, следовательно, не требуется какой-либо классификации. Тем не менее, поскольку удобные обозначения иногда могут оказать помощь при общении и обсуждении идей, Рекомендация INC-1 (1980) все же дает схему классификации двух четких *методов*, по которым составляющие неопределенности можно оценить, как "А" и "В" (см. 0.7, 2.3.2 и 2.3.3).

Классификация методов, используемых для оценивания составляющих неопределенности, позволяет избежать принципиальной проблемы, связанной с классификацией самих составляющих, а именно, зависимости классификации составляющей от того, как соответствующая величина используется. Однако классификация методов вместо составляющих не препятствует группированию отдельных составляющих, оцененных двумя методами, в определенные группы для конкретной цели в данном измерении, например, при сравнении экспериментально наблюдаемой и теоретически предсказанной изменчивости выходных величин сложной измерительной системы (см. 3.4.3).

Е.4 Стандартные отклонения как меры неопределенности

Е.4.1 Уравнение (Е.3) требует, чтобы независимо от способа получения оценки входной величины она должна оцениваться как стандартная неопределенность, т.е. как оцененное стандартное отклонение. Если вместо нее оценивается какая-либо другая "безопасная" величина, ее нельзя использовать в уравнении (Е.3). В частности, если в уравнении (Е.3) используется "максималь-ный предел погрешности" (самое большое возможное отклонение от предполагаемой наилучшей оценки), то результирующая неопределенность будет иметь плохо определенное значение и будет непригодной для использования кем-либо, кто хочет включить ее в последующие вычисления неопределенностей других величин (см. E.3.3).

E.4.2 Когда стандартную неопределенность входной величины нельзя оценить с помощью анализа результатов наблюдений, повторенных необходимое число раз, нужно применить распределение вероятностей, основанное на знании, которое гораздо скуднее желаемого. Однако это не делает распределение непригодным или нереальным; как и все распределения вероятностей, оно является выражением того знания, какое существует.

E.4.3 Оценки, основанные на повторных наблюдениях, не обязательно лучше, чем оценки, полученные другими средствами. Рассмотрим $s(\bar{q})$ - экспериментальное стандартное отклонение среднего из n независимых наблюдений q_k нормально распределенной случайной переменной q (см. уравнение (5) в 4.2.3). Величина $s(\bar{q})$ является статистикой (см. C.2.23), которая оценивает $\sigma(\bar{q})$ - стандартное отклонение распределения вероятностей $\bar{q}$, т.е. стандартное отклонение распределения значений $\bar{q}$, которое было бы получено, если бы измерение было повторено бесконечное число раз. Дисперсия $\sigma^2[s(q)]$ от $s(q)$ дается приблизительно выражением:

$$\sigma^2\left[s(\bar{q})\right] \approx \sigma^2(\bar{q})/2\nu, \quad (E.7)$$

где $\nu = n$-1 является степенями свободы $s(\bar{q})$ (см. G.3.3). Таким образом, относительное стандартное отклонение $s(\bar{q})$, которое дано отношением $\sigma\left[s(\bar{q})\right] / \sigma(\bar{q})$ и может быть принято как мера относительной неопределенности $s(\bar{q})$, составляет приблизительно $[2(n-1)]^{-1/2}$. Эта "неопределенность неопределенности" $\bar{q}$, которая возникает по чисто статистической причине ограниченности выборки, может быть удивительно большой; для n=10 наблюдений она составляет 24 процента. Это и другие значения даны в Таблице E.1, которая показывает, что стандартным отклонением статистически оцененного стандартного отклонения нельзя пренебрегать для практических значений n. Отсюда можно сделать вывод, что оценки Типа А стандартной неопределенности не обязательно более надежны, чем оценки Типа В, и что во многих практических измерительных ситуациях, когда число наблюдений ограничено, составляющие, полученные из оценивания по Типу В, могут быть известны лучше, чем составляющие, полученные из оценивания по Типу А.

Таблица E.1 - $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, стандартное отклонение экспериментального стандартного отклонения среднего $\bar{q}$ из n независимых наблюдений нормально распределенной случайной переменной q относительно стандартного отклонения этого среднего[(a)]

Число наблюдений n	$\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$ (проценты)
2	76
3	52
4	42
5	36
10	24
20	16
30	13
50	10

(a) Приведенные значения вычислены из точного выражения для $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, а не из приблизительного выражения $[2(n-1)]^{-1/2}$.

E.4.4 Утверждалось, что, хотя неопределенности, связанные с применением конкретного метода измерения, являются статистическими параметрами, характеризующими случайные переменные, существуют примеры "чисто систематического эффекта", чья неопределенность должна рассматриваться по-другому. Примером может служить отклонение, имеющее неизвестное постоянное значение, которое одинаково для каждого определения данным методом и обусловлено возможным несовершенством самого принципа, заложенного в метод, или одним из его основных допущений. Но если признается возможность существования такого отклонения и его величина предполагается значительной, то его можно описать с помощью распределения вероятностей простого вида, основанного на знании, которое привело к выводу, что оно может существовать и являться значительным. Таким образом, если вероятность рассматривается как мера степени уверенности, что событие произойдет, вклад такого систематического эффекта может быть включен в суммарную стандартную неопределенность результата измерения путем оценивания его как стандартной неопределенности *априорного* распределения вероятностей и рассмотрения ее таким же образом, как и любой другой стандартной неопределенности входной величины.

ПРИМЕР - Спецификация конкретной измерительной процедуры требует, чтобы определенная входная величина рассчитывалась из конкретного разложения в степенной ряд, чьи члены высшего порядка известны неточно. Систематический эффект, обусловленный невозможностью точно оценить эти члены, ведет к неизвестному постоянному отклонению, которое нельзя экспериментально определить путем повторения процедуры. Таким образом, неопределенность, связанную с этим эффектом, нельзя оценить и включить в неопределенность конечного результата измерения, если строго следовать частотной интерпретации вероятности. Однако толкование вероятности на основе степени уверенности позволяет оценить неопределенность, характеризующую эффект, из *априорного* распределения вероятностей (выведен-ного из имеющегося знания о неточно известных членах) и включить ее в расчет суммарной стандартной неопределенности результата измерения подобно любой другой неопределенности.

E.5 Сравнение двух взглядов на неопределенность

E.5.1 В центре внимания этого *Руководства* находятся результат измерения и его оцененная неопределенность, а не "истинное" значение и погрешность, которые невозможно определить (см. Приложение D).Принимая за рабочую точку зрения, что результат измерения является просто значением, приписанным измеряемой величине, и что неопределенность этого результата является мерой дисперсии значений, которые уместно было бы приписать измеряемой величине, данное *Руководство* на деле разъединяет часто вносящую путаницу связь между неопределенностью и неизвестными величинами "истинное" значение и погрешность.

E.5.2 Эту связь можно понять, интерпретируя производную уравнения (E.3) - закон распространения неопределенности, с точки зрения "истинного" значения и погрешности. В этом случае μ_i рассматривается как неизвестное единственное "истинное" значение входной величины w_i и предполагается, что каждое w_i связано с его истинным значением μ_i как $w_i = \mu_i + \varepsilon_i$, где ε_i является погрешностью в w_i. Предполагается, что ожидание распределения вероятностей каждого ε_i равно нулю, $E(\varepsilon_i)=0$, а дисперсия $E(\varepsilon_i^2)= \sigma_i^2$. Тогда уравнение (E.1) получает вид:

$$\varepsilon_z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i} \varepsilon_i, \qquad \text{(E.8)}$$

где $\varepsilon_z = z - \mu_z$ является погрешностью в z и μ_z является "истинным" значением z. Взяв ожидание квадрата ε_z, получим уравнение, идентичное по форме уравнению (E.3), но где $E(\varepsilon_z^2) = \sigma_z^2$ является дисперсией ε_z, $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=\upsilon(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ - ковариацией ε_i и ε_j, а $\rho_{ij} = \upsilon(\varepsilon_i, \varepsilon_j)/(\sigma_i^2 \sigma_j^2)^{1/2}$ является коэффициентом корреляции ε_i и ε_j. Дисперсии и ковариации, таким образом, ассоциируются с *погрешностями* входных величин, а не с самими входными величинами.

ПРИМЕЧАНИЕ - Предполагается, что вероятность рассматривается как мера степени уверенности в том, что событие произойдет; это означает, что систематическую погрешность можно рассматривать так же, как и случайную погрешность, и что ε_i может представлять и ту, и другую.

E.5.3 На практике расхождение в точках зрения не ведет к расхождению в численных значениях результата измерения или неопределенности, приписываемой этому результату.

Во-первых, в обоих случаях для получения наилучшей оценки z из функции f используются наилучшие имеющиеся оценки входных величин w_i; при этом *в расчетах* нет никакой разницы от того, рассматриваются ли эти наилучшие оценки как значения, наиболее соответствующие измеряемым величинам, или как наилучшие оценки их "истинных" значений.

Во-вторых, поскольку $\varepsilon_i = w_i - \mu_i$ и μ_i представляют единственные фиксированные значения и, следовательно, не имеют неопределенности, дисперсии и стандартные отклонения ε_i и w_i идентичны. Это означает, что в обоих случаях стандартные неопределенности, используемые как оценки стандартных отклонений σ_i для получения суммарной стандартной неопределенности результата измерения, идентичны и дадут одинаковое численное значение для этой неопределенности. И опять нет никакой разницы *при расчетах*; рассматривается ли стандартная неопределенность как мера дисперсии распределения вероятностей входной величины или как мера дисперсии распределения вероятностей погрешности этой величины.

ПРИМЕЧАНИЕ - Если не было сделано допущения Примечания к E.5.2, то рассуждения этого подпункта были бы неприменимы, за исключением случая, когда все оценки входных величин и неопределенности этих оценок получают из статистического анализа повторных наблюдений, то есть из оценивания по типу А.

E.5.4 Хотя подход, основанный на "истинном" значении и погрешности, дает такие же численные результаты, как и подход, используемый в данном *Руководстве* (при условии, что сделано допущение, как в Примечании к E.5.2), концепция неопределенности данного *Руководства* устраняет путаницу между погрешностью и неопределенностью (см. Приложение D). В самом деле, рабочий подход данного *Руководства*, в котором упор сделан на наблюдаемом (или оцененном) значении величины и на наблюдаемой (или оцененной) изменчивости этого значения, делает любое упоминание о погрешности абсолютно ненужным.

Приложение F

Практические рекомендации по оцениванию составляющих неопределенности

В этом приложении даны дополнительные предложения по оцениванию составляющих неопределенности, в основном практического характера, которые имеют своей целью дополнить предложения, которые уже даны в разделе 4.

F.1 Составляющие, оцениваемые на основе повторных наблюдений: оценивание стандартной неопределенности по типу А

F.1.1 Случайность и повторные наблюдения

F.1.1.1 Неопределенности, определяемые на основе повторных наблюдений, часто противопоставляются тем, которые оцениваются с помощью иных средств, как "объективные", "статистически строгие" и т.п. При этом неправильно подразумевается, что их можно оценивать простым применением статистических формул к наблюдениям и что для их оценок не требуется применения какого-либо суждения.

F.1.1.2 Следует, прежде всего, задать вопрос: "До какой степени повторные наблюдения являются полностью независимыми повторениями измерительной процедуры?" Если все наблюдения входят в одну выборку и если осуществление выборок является частью измерительной процедуры, поскольку измеряемая величина является свойством любого материала (в противовес свойству данного конкретного материала), то тогда повторные наблюдения не независимы; к наблюдаемой дисперсии повторных наблюдений, входящих в одну выборку, следует добавить оценку составляющей дисперсии, обусловленную возможными расхождениями между выборками.

Если установка нуля прибора является частью измерительной процедуры, то она должна производиться как часть каждого повторения, даже если имеется пренебрежимо малый дрейф в течение периода проведения наблюдений, ибо потенциально существует статистически определяемая неопределенность, приписываемая установке нуля.

Подобным же образом, если снимаются показания барометра, то, в принципе, их следует снимать при каждом повторении измерений (предпочтительнее при этом нарушить его показания и позволить ему возвратиться в положение равновесия), поскольку могут быть изменения как в показаниях, так и в процессе их снятия, даже если барометрическое давление остается постоянным.

F.1.1.3 Во-вторых, нужно спросить, являются ли все влияния, которые предполагаются случайными, действительно случайными. Являются ли средние и дисперсии их распределений постоянными, или, возможно, имеется дрейф значений неизмеряемой влияющей величины в период повторных наблюдений? Если имеется достаточное количество наблюдений, то можно рассчитать средние арифметические результатов первой и второй половины периода и их экспериментальные стандартные отклонения и сравнить два средних друг с другом, чтобы определить, является ли различие между ними статистически значимым и существует ли, таким образом, влияние, изменяющееся во времени.

F.1.1.4 Если значения величин в линиях "общего обеспечения" в лаборатории (напряжение и частота электрической сети, давление и температура воды, давление азота и т.п.) являются влияющими величинами, то обычно в их колебаниях имеется сильно неслучайный элемент, который нельзя упускать из виду.

F.1.1.5 Если наименьшая значимая цифра в показаниях цифрового прибора непрерывно меняется во время наблюдения под влиянием "шумов", то иногда бывает трудно не выбрать (не отдавая при этом себе отчета) лично предпочитаемые значения этого знака. Лучше найти какие-либо средства для "замораживания" показания прибора в произвольный момент для записи "замороженного" показания.

F.1.2 Корреляции

Значительная часть рассуждений в данном подразделе также применима к оцениваниям стандартной неопределенности по типу B.

F.1.2.1 Ковариация, связанная с оценками двух входных величин X_i и X_j, может быть принята равной нулю или считаться несущественной, если

a) X_i и X_j являются *некоррелированными* случайными переменными, а не физическими величинами, которые предполагаются инвариантными - см. 4.1.1, примечание 1), например, потому, что они повторно, но не одновременно, измерялись в *различных* независимых экспериментах, или потому, что они представляют результирующие величины *различных* оцениваний, которые проводились независимо, или если

b) любая из величин X_i и X_j может рассматриваться как постоянная, или если

c) имеющаяся информация недостаточна для оценки ковариации, связанной с оценками X_i и X_j.

ПРИМЕЧАНИЯ

1 С одной стороны, в определенных случаях, в таких как пример с образцовым резистором из примечания 1 в 5.2.2, очевидно, что входные величины полностью коррелированы и что стандартные неопределенности их оценок суммируются линейно.

2 Разные эксперименты могут не быть независимыми, если, например, в каждом из них используется один и тот же прибор (см. F.1.2.3).

F.1.2.2 Являются или не являются две повторно и одновременно наблюдаемые входные величины коррелированными, можно определить с помощью уравнения (17) в 5.2.3. Например, если влияние температуры на частоту генератора не компенсируется или компенсируется плохо, а частота является входной величиной, если окружающая температура также является входной величиной и если за ними наблюдают одновременно, то может быть значительная корреляция, которая может быть продемонстрирована вычисленной ковариацией частоты генератора и окружающей температуры.

F.1.2.3 На практике входные величины часто являются коррелированными, так как те же самые вещественный эталон измерения, измерительный прибор, справочные данные или даже метод измерений, имеющие существенную неопределенность, используются в оценке их значений. Без потери общности предположим, что две входные величины X_1 и X_2 , оцененные с помощью x_1 и x_2, зависят от множества некоррелированных переменных Q_1, Q_2,..., Q_L. Таким образом, $X_1 = F(Q_1, Q_2,..., Q_L)$ и $X_2 = G(Q_1, Q_2,..., Q_L)$, хотя некоторые из этих переменных могут в действительности появиться только в одной функции. Если $u^2(q_l)$ представляет собой оцененную дисперсию, связанную с оценкой q_l переменной Q_l, то тогда оцененная дисперсия, связанная с X_l, выражается из уравнения (10) в 5.1.2, как

$$u^2(x_1) = \sum_{l=1}^{L} \left[\frac{\partial F}{\partial q_l} \right]^2 u^2(q_l)\,, \text{(F.1)}$$

и аналогичное выражение будет для $u^2(x_2)$. Оцененная ковариация, связанная с x_1 и x_2, выражается, как

$$u\ (x_1, x_2) = \sum_{l=1}^{L} \frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} u^2(q_l)\,. \ \text{(F.2)}$$

Поскольку только те члены, для которых $\partial F/\partial q_l \neq 0$ и $\partial G/\partial q_l \neq 0$ при данном l вносят свой вклад в сумму, ковариация равна нулю, если ни одна из переменных не является общей для F и G.

Оцененный коэффициент корреляции $r(x_1, x_2)$, связанный с двумя оценками x_1 и x_2, определяют из $u(x_1, x_2)$ [уравнение (F.2)] и уравнения (14) в 5.2.2, при этом $u(x_1)$ вычисляется из уравнения (F.1), а $u(x_2)$ - из аналогичного выражения (смотри также уравнение (H.9) в H.2.3). Также возможно, что оцененная ковариация, связанная с двумя входными величинами, имела как статистическую компоненту (см. уравнение (17) в 5.2.3), так и компоненту, происхождение которой описано в данном подразделе.

ПРИМЕРЫ

1 Эталонный резистор R_S используется в одном и том же измерении для определения как тока I, так и температуры t. Ток определяется путем измерения цифровым вольтметром разности потенциалов на зажимах эталонного резистора; температура определяется путем измерения с помощью моста сопротивлений и эталонного резистора сопротивления $R_t(t)$ калиброванного резистивного датчика температуры, для которого зависимость сопротивления от температуры в диапазоне 15 °C $\leq t \leq$ 30 °C выражается как $t = aR^2_t(t) - t_0$, где a и t_0 - известные константы. Таким образом, ток определяется из соотношения $I = V_S/R_S$, а температура из соотношения $t = a\beta(t)R^2_S(t) - t_0$, где $\beta(t)$ - измеренное отношение $R_t(t)/R_S$, полученное с помощью моста.

Поскольку только величина R_S является общей в выражениях для I и t, из уравнения (F.2) получаем ковариацию для I и t

$$\begin{aligned} u(I,t) &= \frac{\partial I}{\partial R_S} \frac{\partial t}{\partial R_S} u^2(R_S) \\ &= \left[-\frac{V_S}{R_S^2} \right] \left(2a\beta^2(t)R_S \right) u^2(R_S) \\ &= -\frac{2I(t+t_0)}{R_S^2} u^2(R_S) \end{aligned}$$

(для простоты обозначения в этом примере то же самое условное обозначение используется как для входной величины, так и для ее оценки).

Для получения числового значения ковариации в это выражение подставляют числовые значения измеряемых величин I и t и значения R_S и $u(R_S)$, приведенные в свидетельстве о калибровке эталонного резистора. Единицей для выражения $u(I, t)$, очевидно, является A• °C, поскольку размерность относительной дисперсии $[u(R_S)/R_S]^2$ равна 1 (т.е. последняя является так называемой безразмерной величиной).

Далее, пусть величина P будет связана с входными величинами I и t соотношением $P = C_0I^2/(T_0 + t)$, где C_0 и T_0 - известные константы с пренебрежимо малыми неопределенностями $[u^2(C_0) \cong 0$; $u^2(T_0) \cong 0]$. Тогда из уравнения (13) в 5.2.2 дисперсия P выражается через дисперсии I и t и их ковариацию, как

$$\frac{u^2(P)}{P^2} = 4\frac{u^2(I)}{I^2} - 4\frac{u(I,t)}{I(T_0+t)} + \frac{u^2(t)}{(T_0+t)^2}\,.$$

Дисперсии $u^2(I)$ и $u^2(t)$ получают, применив уравнение (10) из 5.1.2 к соотношениям $I = V_S/R_S$ и $t = a\beta^2(t)R^2_S - t_0$. Результаты следующие

$$u^2(I)/I^2 = u^2(V_S)/V_S^2 + u^2(R_S)/R_S^2$$
$$u^2(t) = 4(t+t_0)^2u^2(\beta)/\beta^2 + 4(t+t_0)^2u^2(R_S)/R_S^2\,,$$

где для простоты предполагается, что неопределенности констант t_0 и a также пренебрежимо малы. Эти выражения можно легко оценить, так как $u^2(V_S)$ и $u^2(\beta)$ могут быть определены, соответственно, при повторном снятии показаний вольтметра и моста сопротивлений. Конечно, любые неопределенности, присущие самим приборам и используемым измерительным процедурам, должны также быть приняты во внимание, когда определяются $u^2(V_S)$ и $u^2(\beta)$.

2 В примере, приведенном в примечании 1 к 5.2.2, пусть калибровка каждого резистора будет представлена выражением $R_i = \alpha_i R_S$ и $u(\alpha_i)$ - стандартная неопределенность измеренного отношения α_i, получена при повторных наблюдениях. Далее, пусть $\alpha_i \approx 1$ для каждого резистора и пусть $u(\alpha_i)$ будет, по существу, одной и той же для каждой калибровки, так что $u(\alpha_i) \approx u(\alpha)$. Тогда из уравнений (F.1) и (F.2) получается: $u^2(R_i)=R^2_S\, u^2(\alpha) + u^2(R_S)$ и $u(R_i\,,\, R_j) = u^2(R_S)$. В соответствии с уравнением (14) в 5.2.2 подразумевается, что коэффициент корреляции любых двух резисторов ($i \neq j$)

$$r(R_i, R_j) \equiv r_{ij} = \left[1+\left(\frac{u(\alpha)}{u(R_S)/R_S}\right)^2\right]^{-1}.$$

Поскольку $u(R_S)/R_S = 10^{-4}$, если $u(\alpha) = 100\times10^{-6}$, то $r_{ij} \approx 0{,}5$; если $u(\alpha) = 10 \times 10^{-6}$, то $r_{ij} \cong 0{,}990$; и если $u(\alpha) = 1\times10^{-6}$, то $r_{ij} \cong 1{,}000$. Таким образом, когда $u(\alpha) \to 0$, $r_{ij} \to 1$ и $u(R_i) \to u(R_S)$.

ПРИМЕЧАНИЕ - В общем случае при калибровках путем сравнения, как в этом примере, оцененные значения калибруемых объектов являются коррелированными, при этом степень корреляции зависит от отношения неопределенности сравнения к неопределенности эталона. В тех случаях, когда неопределенность сравнения пренебрежимо мала, как это часто случается на практике, по сравнению с неопределенностью эталона, коэффициенты корреляции равны +1 и неопределенность каждого калибруемого объекта та же самая, что и у эталона.

F.1.2.4 Необходимость введения ковариации $u(x_i, x_j)$ можно обойти, если исходное множество входных величин X_1, X_2,..., X_N , от которых зависит измеряемая величина Y [см. уравнение (1) в 4.1], переопределяется таким образом, чтобы включить в качестве дополнительных независимых входных величин те величины Q_l , которые являются общими для двух или более исходных X_i (может быть необходимо провести дополнительные измерения, чтобы полностью установить соотношение между Q_l и затронутыми X_i). Вместе с тем в некоторых ситуациях может быть более удобно сохранить ковариации, чем увеличивать число входных величин. Подобный процесс может быть осуществлен в отношении наблюдаемых ковариаций непрерывных повторных наблюдений [см. уравнение (17) в 5.2.3], но идентификация приемлемых дополнительных входных величин часто проводится *для данного случая* и является нефизической.

ПРИМЕР - Если в примере 1 из предыдущего подраздела формулы для выражения I и t через R_S вводятся в выражение для P, то результатом является

$$P=\frac{C_0 V_S^2}{R_S^2\left[T_0+a\beta^2(t)R_S^2-t_0\right]},$$

и корреляцию между I и t исключают за счет замены входных величин I и t величинами V_S , R_S и β. Поскольку эти величины являются некоррелированными, дисперсию P можно получить из уравнения (10) в 5.1.2.

F.2 Составляющие, оцениваемые с помощью иных средств: оценивание стандартной неопределенности по типу B

F.2.1 Необходимость оценивания по типу B

Если измерительная лаборатория располагала бы неограниченным временем и ресурсами, то она могла бы провести исчерпывающие статистические исследования каждой мыслимого источника неопределенности, например, используя много различных моделей и типов приборов, различные методы измерений, различные применения метода и различные аппроксимации в своих теоретических моделях измерения. Неопределенности, связанные со всеми этими источниками, могли бы затем быть оценены с помощью статистического анализа рядов наблюдений; и неопределенность, обусловленная каждым источником, могла бы быть охарактеризована статистически оцененным стандартным отклонением. Другими словами, все составляющие неопределенности были бы получены из оценивания по типу А. Поскольку такие исследования практически неосуществимы по экономическим соображениям, многие составляющие неопределенности должны оцениваться любыми другими практически осуществимыми способами.

F.2.2 Математически детерминированные распределения

F.2.2.1 Разрешение цифрового показания

Одним из источников неопределенности цифрового прибора является разрешение его отсчетного устройства. Например, если даже все повторно снимаемые показания были идентичными, неопределенность измерения, приписываемая повторяемости, не будет равна нулю, ибо существует диапазон входных сигналов прибора, покрывающий известный интервал, при котором будут одни и те же показания. Если разрешение отсчетного устройства равно δx, то значение воздействия, которое вызывает данное показание X, может с равной вероятностью лежать в любом месте интервала от $X - \delta x/2$ до $X + \delta x/2$. Воздействие, таким образом, описывается прямоугольным распределением вероятностей (см. 4.3.7 и 4.4.5) шириной δx при дисперсии $u^2 = (\delta x)^2/12$, при этом подразумевается, что стандартная неопределенность $u = 0{,}29\ \delta x$ для любого показания.

Таким образом, прибор для взвешивания с отсчетным устройством, в котором наименьшая значимая цифра соответствует 1 г, имеет дисперсию, обусловленную разрешением устройства, $u^2 = (1/12)\ г^2$ и стандартную неопределенность $u = (1/\sqrt{12})\ г = 0{,}29\ г$.

F.2.2.2 Гистерезис

Определенные виды гистерезиса могут вызывать неопределенности аналогичного вида. Показания прибора могут отличаться на фиксированные и известные значения в зависимости от того, увеличиваются или уменьшаются последовательные значения. Опытный оператор примет во внимание направление последовательных показаний и введет соответствующую поправку. Однако направление гистерезиса не всегда наблюдаемо: могут существовать скрытые колебания внутри прибора относительно точки равновесия, так что показание зависит от направления, по которому, в конце концов, к этой точке приближаются. Если диапазон возможных показаний по этой причине равен δx, то дисперсия опять $u^2 = (\delta x)^2/12$, а стандартная неопределенность, обусловленная гистерезисом, $u = 0{,}29\ \delta x$.

F.2.2.3 Вычисления с ограниченной точностью

Округление или усечение чисел, происходящее при автоматической редукции данных компьютером, может также быть источником неопределенности. Рассмотрим, например, компьютер с длиной слова в 16 бит. Если в процессе вычислений число, имеющее такую длину слова, вычитается из другого числа, от которого оно отличается только в 16-ом бите, остается только один значащий бит. Такое может наблюдаться при оценивании "плохо обусловленных" алгоритмов и это трудно предсказать. Можно получить эмпирическое определение неопределенности путем увеличения наиболее важной для вычислений входной величины (часто существует одна такая, которая пропорциональна значению выходной величины) с помощью малых приращений до тех пор, пока выходная величина не изменится; наименьшее изменение выходной величины, которое достигается таким способом, может быть принято в качестве меры неопределенности; если оно равно δx, то дисперсия $u^2 = (\delta x)^2 /12$ и $u = 0{,}29\ \delta x$.

ПРИМЕЧАНИЕ - Можно проверить оценку неопределенности путем сравнения результата вычисления, выполненного на машине с ограниченной длиной слова, с результатом такого же вычисления, выполненного на машине со значительно большей длиной слова.

F.2.3 Заимствованные входные значения

F.2.3.1 *Заимствованным* значением входной величины является то, которое не оценивалось в ходе данного измерения, а было получено где-то в результате независимого оценивания. Часто такое заимствованное значение сопровождается сообщением того или иного вида о его неопределенности. Например, неопределенность может быть указана в виде стандартного отклонения, значения, кратного стандартному отклонению, или полуширины интервала, имеющего указанный уровень доверия. В других случаях могут быть указаны верхний и нижний пределы, или может быть не дано никакой информации относительно неопределенности. В последнем случае те, кто используют это значение, должны применить свои собственные знания о возможном значении неопределенности, исходя из природы величины, надежности источника, неопределенностей, полученных для таких величин на практике, и т.п.

ПРИМЕЧАНИЕ - Обсуждение неопределенности заимствованных величин включено в данный подраздел об оценивании стандартной неопределенности по типу В из соображений удобства; неопределенность такой величины могла бы состоять из составляющих, полученных из оценивания по типу А, или из составляющих, полученных из оценивания как по типу А, так и по типу В. Поскольку нет необходимости проводить различие между составляющими, оцененными двумя разными методами, чтобы вычислить суммарную стандартную неопределенность, нет и необходимости знать состав неопределенности заимствованной величины.

F.2.3.2 Некоторые калибровочные лаборатории приняли практику выражения "неопределенности" в виде верхнего и нижнего пределов, которые определяют интервал, имеющий "минимальный" уровень доверия, например, "по крайней мере" 95 процентов. Это можно рассматривать как пример так называемой "безопасной" неопределенности (см. E.1.2), и ее нельзя преобразовать в стандартную неопределенность без знания того, как она вычислялась. Если приведено достаточно информации, то ее можно повторно рассчитать в соответствии с правилами настоящего *Руководства*; в противном случае должна быть проведена независимая оценка неопределенности любыми средствами, имеющимися в распоряжении.

F.2.3.3 Некоторые неопределенности даются просто как максимальные пределы, в которых, как говорят, лежат *все* значения величины. Обычно предполагается, что все значения в этих пределах являются равновероятными (прямоугольное распределение вероятностей), но такое распределение не следует предполагать, если есть основания ожидать, что значения, близкие к пределам, менее вероятны, чем те, которые лежат ближе к центру интервала. Прямоугольное распределение полуширины a имеет дисперсию $a^2/3$; нормальное распределение, для которого a является половиной ширины интервала с уровнем доверия 99,73 процентов, имеет дисперсию $a^2/9$. Разумно принять компромисс между этими значениями, например, допуская треугольное распределение, для которого дисперсия составляет $a^2/6$ (см. 4.3.9 и 4.4.6).

F.2.4 Измеряемые входные величины

F.2.4.1 Единичное наблюдение, откалиброванные средства измерений

Если оценка входной величины получена по единичному наблюдению с помощью конкретного средства измерения, которое откалибровано по эталону с малой неопределенностью, то неопределенность оценки - это, в основном, неопределенность воспроизводимости. Дисперсия повторных измерений с помощью данного средства измерения могла быть получена раньше по какому-либо поводу, не обязательно с точно таким же значением показания, но с достаточно близким к нему, чтобы его можно было использовать; при этом можно допустить, что эта дисперсия применима к рассматриваемой входной величине. Если такая информация отсутствует, то оценка должна основываться на характере измерительной аппаратуры или прибора, известных дисперсиях других приборов аналогичной конструкции и т.д.

F.2.4.2 Единичное наблюдение, поверенные средства измерений

Не все средства измерения снабжаются свидетельствами о калибровке или градуировочной характеристикой. Однако большинство измерительных приборов создается в соответствии с разработанным стандартом и поверяется либо заводом изготовителем, либо независимой поверочной организацией в соответствии с этим стандартом. Обычно стандарт содержит метрологические требования, часто в виде "максимально допускаемых погрешностей", которым должно соответствовать данное средство измерения. Это соответствие прибора требованиям определяется путем сравнения с образцовым средством измерений, максимально допускаемая неопределенность которого обычно указывается в стандарте. Следовательно, эта неопределенность является составляющей неопределенности поверенного прибора.

Если ничего не известно о характеристике погрешности градуировочной кривой поверенного прибора, то следует допустить, что существует равная вероятность того, что погрешность имеет любое значение в допустимых пределах, т.е. прямоугольное распределение вероятностей. Однако некоторые типы приборов имеют такие градуировочные кривые, что погрешности могут быть, например, всегда положительными в одной части диапазона измерения и отрицательными в других частях. Иногда такая информация может быть извлечена из разработанного стандарта.

F.2.4.3 Контролируемые величины

Измерения часто осуществляются в стандартных контролируемых условиях, которые считаются постоянными в течение всех рядов измерений. Например, измерения могут проводиться на образцах в перемешиваемой масляной ванне, температура которой регулируется с помощью термостата. Температуру ванны можно измерять в момент каждого измерения на образце, но если температура ванны изменяется циклически, то мгновенная температура образца может не соответствовать температуре, показываемой термометром в ванне. Расчет флюктуаций температуры образца, основанный на теории теплопередачи, и их дисперсии выходит за рамки, предусмотренные настоящим *Руководством*, но он должен начинаться с известного или предполагаемого температурного цикла для ванны. Этот цикл можно наблюдать при помощи высокочувствительной термопары и регистратора температуры, однако в случае их отсутствия его можно приближенно вывести из данных о характере регулирования.

F.2.4.4 Асимметричные распределения возможных значений

Известны случаи, когда все возможные значения величины лежат по одну сторону от одного предельного значения. Например, при измерении постоянной вертикальной высоты h (измеряемая величина) столба жидкости в манометре ось измерителя высоты может отклоняться от вертикали на небольшой угол β. Расстояние l, определяемое с помощью этого прибора, всегда будет *больше*, чем h; никакие значения, меньшие чем h, невозможны. Это обусловлено тем, что h равно проекции l на вертикаль: $h = l/\cos\beta$, а все значения $\cos\beta$ меньше единицы; никакие значения, большие чем единица, невозможны. Эта так называемая "косинусная погрешность" может также проявляться в том, что проекция $h' \cos\beta$ измеряемой величины h' равна наблюдаемому расстоянию l, т.е. $l = h' \cos\beta$, и наблюдаемое расстояние всегда *меньше* измеряемой величины.

Если ввести новую переменную $\delta = 1 - \cos\beta$, то, полагая $\beta \approx 0$ или $\delta << 1$, как это обычно наблюдается на практике, получаем две различные ситуации:

$$h = \bar{l}(1-\delta) \qquad \text{(F.3a)},$$

$$h' = \bar{l}(1+\delta) \qquad \text{(F.3b)}.$$

Здесь $\bar{l}$, наилучшая оценка l, является средним арифметическим или средним из n независимых повторных наблюдений l_k для l с оцененной дисперсией $u^2(\bar{l})$ [см. уравнения (3) и (5) в 4.2]. Таким образом, из уравнений (F.3a) и (F.3b) следует, что для получения оценки h или h' необходима оценка поправочного коэффициента δ, в то время как для получения суммарной стандартной неопределенности оценки h или h' требуется $u^2(\delta)$, оцененная дисперсия δ. Более конкретно, применение уравнения (10) из 5.1.2 к уравнениям (F.3a) и (F.3b) дает для $u_c^2(h)$ и $u_c^2(h')$ (соответственно со знаками – и +):

$$u_c^2 = (1 \mp \delta)^2 u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \quad \text{(F.4a)}$$

$$\approx u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta)\,. \qquad \text{(F.4b)}$$

Для получения оценок ожидаемого значения δ и дисперсии δ допустим, что ось прибора, используемого для измерения высоты столба жидкости в манометре, ограничена фиксацией в вертикальной плоскости и что распределение значений угла наклона β около ожидаемого нулевого значения является нормальным распределением с дисперсией σ^2. Хотя β может иметь как положительные, так и отрицательные значения, $\delta = 1 - \cos\beta$ является положительным для всех значений β. Если допустить, что рассогласование оси прибора не ограничено, то ориентация оси может изменяться в пределах телесного угла, поскольку она способна к рассогласованию также по азимуту, но β в этом случае будет всегда положительным углом.

В ограниченном или одномерном случае **элемент вероятности** $p(\beta)\mathrm{d}\beta$ (C.2.5, примечание) пропорционален $[\exp(-\beta^2 / 2\sigma^2)]\mathrm{d}\beta$; в неограниченном или двумерном случае элемент вероятности пропорционален $[\exp(-\beta^2/2\sigma^2)] \sin\beta\, \mathrm{d}\beta$. Функции плотности вероятностей $p(\delta)$ в этих двух случаях являются выражениями, необходимыми для определения ожидания и дисперсии δ для использования в уравнениях (F.3) и (F.4). Их можно легко получить из этих элементов вероятности, т.к. угол β может быть предположительно небольшим, и, следовательно, $\delta = 1 - \cos\beta$ и $\sin\beta$ можно разложить в ряд с членами самого низкого порядка по β. Это дает $\delta \approx \beta^2/2$, $\sin\beta \approx \beta = \sqrt{2\delta}$ и $\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}\delta / \sqrt{2\delta}$. Тогда функции плотности вероятностей будут иметь следующие выражения:

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi\delta}} \exp(-\delta/\sigma^2) \qquad \text{(F.5a)}$$

в одномерном случае,

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma^2} \exp(-\delta/\sigma^2) \qquad \text{(F.5b)}$$

в двумерном случае,

где

$$\int_0^\infty p(\delta)d\delta = 1\,.$$

Уравнения (F.5a) и (F.5b), которые показывают, что наиболее вероятное значение поправки δ в обоих случаях является нулевым, дают в одномерном случае $E(\delta) = \sigma^2/2$ и $\text{var}(\delta) = \sigma^4/2$ для ожидания и дисперсии δ, а в двумерном случае $E(\delta) = \sigma^2$ и $\text{var}(\delta) = \sigma^4$. Тогда уравнения (F.3a), (F.3b) и (F.4b) принимают вид

$$h = \bar{l}[1-(d/2)u^2(\beta)] \qquad \text{(F.6a)}$$

$$h' = \bar{l}[1+(d/2)u^2(\beta)] \qquad \text{(F.6b)}$$

$$u_c^2(h) = u_c^2(h') = u^2(\bar{l}) + (d/2)\bar{l}^2 u^4(\beta) \text{ ,(F.6c)}$$

где d - размерность (d=1 или 2) и $u(\beta)$ - стандартная неопределенность угла β, принимаемая за наилучшую оценку стандартного отклонения σ предполагаемого нормального распределения, которая должна оцениваться с учетом всей имеющейся информации об измерительном процессе (оценивание по типу В). Это пример того случая, когда оценка значения измеряемой величины зависит от *неопределенности* входной величины.

Хотя уравнения (F.6a) - (F.6c) специфичны для нормального распределения, можно провести анализ, допуская другие распределения для β. Например, если для β принять симметричное прямоугольное распределение с верхним и нижним пределами $+\beta_0$ и $-\beta_0$ в одномерном случае и $+\beta_0$ и нуль в двумерном случае, то $E(\delta) = \beta_0^2/6$ и $\text{var}(\delta) = \beta_0^4/45$ для одномерного и $E(\delta) = \beta_0^2/4$ и $\text{var}(\delta) = \beta_0^4/48$ для двумерного случаев.

ПРИМЕЧАНИЕ - Это ситуация, когда разложение функции $Y = f(X_1, X_2,..., X_N)$ в ряд Тейлора до членов первого порядка для получения $u_c^2(y)$, уравнение (10) в 5.1.2, является неадекватным из-за нелинейности f: $\overline{\cos\beta} \neq \cos\bar{\beta}$ (см. примечание 2 к 5.1.2 и Н.2.4). Хотя анализ можно провести полностью в значениях β, введение переменной δ упрощает задачу.

Другим примером ситуации, где все возможные значения величины лежат по одну сторону от одного предельного значения, является определение концентрации компонента в растворе методом титрования, где на конечную точку указывает срабатывание сигнала; количество добавляемого реактива всегда больше того, которое требуется для срабатывания сигнала; оно никогда не бывает меньше. Избыточное количество, титруемое за предельной точкой, представляет собой необходимую переменную при обработке данных, и процедура в этом (и подобных) случаях состоит в том, чтобы принять приемлемое распределение вероятностей для избыточного количества и использовать его для получения ожидаемого значения избытка и его дисперсии.

ПРИМЕР - Если для избытка z принять прямоугольное распределение: нуль - нижний предел, C_0 - верхний предел; то ожидаемое значение избытка будет $C_0/2$ со связанной с ним дисперсией $C_0^2/12$. Если функция плотности вероятностей избытка берется как функция нормального распределения при $0 \le z < \infty$, т.е. $p(z) = (\sigma\sqrt{\pi/2}\,)^{-1}\exp(-z^2/2\sigma^2)$, то ожидаемое значение будет $\sigma\sqrt{2/\pi}$ с дисперсией $\sigma^2(1-2/\pi)$.

F.2.4.5 Неопределенность при отсутствии поправок по калибровочной кривой

В примечании к 6.3.1 рассматривается случай, когда известная поправка b на значимый систематический эффект не применяется к сообщаемому результату измерения, но вместо этого учитывается путем увеличения "неопределенности", приписываемой этому результату. Например, расширенная неопределенность U заменяется на $U + b$, где U является расширенной неопределенностью, полученной при допущении, что $b = 0$. Это иногда применяется на практике в тех случаях, когда выполняются все следующие условия: измеряемая величина Y определяется в диапазоне значений параметра t, как в случае калибровочной кривой для датчика температуры; U и b также зависят от t; и лишь единственное значение "неопределен-ности" должно быть дано для всех оценок $y(t)$ измеряемой величины в диапазоне возможных значений t. В таких ситуациях результат измерения часто приводится в виде $Y(t)=y(t) \pm [U_{max} + b_{max}]$, где нижний индекс "max" указывает на то, что используются максимальные значения U и b в диапазоне значений t.

Хотя *Руководство* рекомендует, чтобы поправки применялись к результатам измерения для известных значимых систематических эффектов, это не всегда осуществимо в такой ситуации ввиду неприемлемых затрат, которые будут иметь место при вычислении и применении индивидуальной поправки, а также при вычислении и использовании индивидуальной неопределенности для каждого значения $y(t)$.

Сравнительно простой подход к решению этой задачи, который согласуется с принципами настоящего *Руководства*, состоит в следующем.

Вычисляется *единственная* средняя поправка $\bar{b}$ по формуле

$$\bar{b} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} b(t)dt, \qquad \text{(F.7a)}$$

где t_1 и t_2 определяют интересующий нас диапазон изменения параметра t, и за лучшую оценку $Y(t)$ принимается $y'(t) = y(t) + \bar{b}$, где $y(t)$ - лучшая беспоправочная оценка $Y(t)$. Дисперсия, связанная со средней поправкой $\bar{b}$ в интересующем нас диапазоне, описывается уравнением

$$u^2(\bar{b}) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} [b(t) - \bar{b}]^2 dt, \qquad \text{(F.7b)}$$

не учитывающим неопределенность действительного определения поправки $b(t)$. Средняя дисперсия поправки $b(t)$, обусловленная ее действительным определением, дается выражением

$$\overline{u^2[b(t)]} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} u^2[b(t)]dt, \qquad \text{(F.7c)}$$

где $u^2[b(t)]$ - дисперсия поправки $b(t)$. Аналогичным образом средняя дисперсия $y(t)$, возникающая из всех источников неопределенности, кроме поправки $b(t)$, определяется по формуле

$$\overline{u^2[y(t)]} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} u^2[y(t)]dt, \qquad \text{(F.7d)}$$

где $u^2[y(t)]$ - дисперсия $y(t)$, обусловленная всеми источниками неопределенности, кроме поправки $b(t)$. Тогда единственным значением стандартной неопределенности, которое должно применяться для *всех* оценок $y'(t) = y(t) + \bar{b}$ измеряемой величины $Y(t)$ будет положительный квадратный корень из выражения

$$u_c^2(y') = \overline{u^2[y(t)]} + \overline{u^2[b(t)]} + u^2(\bar{b}). \qquad \text{(F.7e)}$$

Расширенную неопределенность U можно получить путем умножения $u_c(y')$ на соответствующим образом выбранный коэффициент охвата k, $U=ku_c(y')$, что дает $Y(t) = y'(t) \pm U = y(t) + \bar{b} \pm U$. Однако следует признать факт применения одной и той же средней поправки для всех значений t, а не поправки, соответствующей каждому значению t, и дать ясное определение того, что представляет собой U.

F.2.5 Неопределенность метода измерения

F.2.5.1 Возможно, наиболее трудной для оценки составляющей неопределенности является неопределенность, связанная с методом измерения, особенно если показано, что данный метод позволяет получить результаты с меньшей изменчивостью, чем любой другой из известных методов. Однако есть вероятность существования других методов, часть из которых пока неизвестны или в некотором смысле непрактичны, которые бы давали систематически различные результаты с кажущейся одинаковой достоверностью. Это предполагает *априорное* распределение вероятностей, а не такое распределение, из которого можно легко производить выборки и осуществлять их статистическую обработку. Таким образом, даже несмотря на то, что неопределенность метода может быть доминирующей составляющей, единственной информацией, часто доступной для оценивания его стандартной неопределенности, являются существующие знания физического мира (см. также Е.4.4.).

ПРИМЕЧАНИЕ - Определяя одну и ту же измеряемую величину различными методами либо в одной, либо в различных лабораториях, или одним и тем же методом в различных лабораториях, часто можно получить ценную информацию о неопределенности, приписываемой какому-либо конкретному методу. Вообще обмен эталонами измерений или стандартными образцами между лабораториями для проведения независимых измерений является обычной практикой оценки надежности определений неопределенности и выявления ранее неизвестных систематических эффектов.

F.2.6 Неопределенность образца

F.2.6.1 Многие измерения связаны со сличением неизвестного объекта с известным эталоном, имеющим аналогичные характеристики, для калибровки этого неизвестного объекта. В качестве примера можно привести концевые меры длины, некоторые термометры, наборы масс, резисторы и высокочистые материалы. В большинстве таких случаев методы измерения не особенно чувствительны к выбору образца (т.е. конкретного калибруемого неизвестного объекта) и, наоборот, не подвержены влиянию этого выбора, подготовке образца или воздействиям различных влияющих факторов окружающей среды, т.к. неизвестный объект и эталон обычно реагируют одинаково (и часто предсказуемо) на влияние таких переменных величин.

F.2.6.2 В некоторых ситуациях, встречающихся в практике измерений, выбор и подготовка образцов играют значительно более важную роль. Это часто наблюдается при химическом анализе природных материалов. В отличие от искусственно созданных материалов, которые могут обеспечить однородность в большей степени, чем это требуется для измерений, природные материалы часто бывают весьма неоднородными. Эта неоднородность приводит к двум дополнительным составляющим неопределенности. Оценивание первой из них требует определения того, насколько адекватно выбранный образец представляет исходный материал, подвергающийся анализу. Оценивание второй составляющей требует определения того, в какой степени вторичные (не подвергающиеся анализу) компоненты влияют на измерение и насколько адекватен для них применяемый метод измерения.

F.2.6.3 В некоторых случаях тщательное планирование эксперимента может позволить произвести статистическую оценку неопределенности, обусловленной образцом (см. Н.5 и Н.5.3.2). Однако, как правило, особенно в тех случаях, когда воздействие влияющих факторов окружающей среды на образец является существенным, для оценивания неопределенности необходимы мастерство и знания аналитика, полученные из практического опыта и всей доступной существующей информации.

Приложение G

Степени свободы и уровни доверия

G.1 Введение

G.1.1 В данном приложении рассматривается общий вопрос получения из оценки y измеряемой величины Y и из суммарной стандартной неопределенности $u_c(y)$ этой оценки расширенной неопределенности $U_p = k_p u_c(y)$, которая определяет интервал $y - U_p \leq Y \leq y + U_p$, имеющий высокую заданную вероятность охвата или уровень доверия p. Таким образом, этот раздел имеет дело с вопросом определения коэффициента охвата k_p, который создает интервал вокруг результата измерения, который предположительно охватывает большую заданную часть p распределения значений, которые обоснованно можно было бы приписать измеряемой величине Y (см. раздел 6).

G.1.2 В большинстве практических измерительных ситуаций расчет интервалов, имеющих заданные уровни доверия (т.е. оценивание наиболее индивидуальных составляющих неопределенности в таких ситуациях) - в лучшем случае, всего лишь приближенный. Даже экспериментальное стандартное отклонение среднего из 30 повторных наблюдений величины, описываемой нормальным распределением, имеет само по себе неопределенность, равную примерно 13 процентов (см. таблицу E.1 в приложении E).

В большинстве случаев не имеет смысла пытаться найти отличие между, например, интервалом, имеющим уровень доверия, равный 95 процентов (один шанс из 20, что значение измеряемой величины Y находится вне этого интервала), и либо 94 процентным, либо 96 процентным интервалом (один шанс из 17 и 25 соответственно). Получение обоснованных интервалов с уровнями доверия 99 процентов (1 шанс из 100) и выше особенно трудное дело, даже если допустить, что никаких систематических эффектов не просматривалось, т.к. обычно бывает доступно весьма мало информации о наиболее экстремальных участках или "хвостах" распределений вероятностей входных величин.

G.1.3 Чтобы получить значение коэффициента охвата k_p, который создает интервал, соответствующий заданному уровню доверия p, необходимы подробные сведения о распределении вероятностей, характеризуемом результатом измерения и его суммарной стандартной неопределенностью. Например, для величины z, описываемой нормальным распределением с ожиданием μ_z и стандартным отклонением σ, можно легко рассчитать значение k_p, которое создает интервал $\mu_z \pm k_p\sigma$, включающий часть p этого распределения и, следовательно, имеющий вероятность охвата или уровень доверия p. Некоторые примеры приведены в таблице G.1.

Таблица G.1 - Значение коэффициента охвата k_p, который создает интервал, имеющий уровень доверия p при допущении нормального распределения

Уровень доверия p (проценты)	Коэффициент охвата k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

ПРИМЕЧАНИЕ - Наоборот, если z описывается прямоугольным распределением вероятностей с ожиданием μ_z и стандартным отклонением $\sigma = a/\sqrt{3}$, где a - половина ширины этого распределения; то уровень доверия p равен 57,74 процентов для $k_p = 1$; 95 процентов для $k_p = 1{,}65$; 99 процентов для $k_p = 1{,}71$; и 100 процентов для $k_p \geq \sqrt{3} \approx 1{,}73$. Прямоугольное распределение "уже", чем нормальное распределение в том смысле, что оно обладает конечной протяженностью и не имеет "хвостов".

G.1.4 Если известны распределения вероятностей входных величин X_1, X_2,..., X_N, от которых зависит измеряемая величина Y [их ожидания, дисперсии и более высокие моменты (см. С.2.13 и С.2.22), если эти распределения не являются нормальными], и если Y является линейной функцией входных величин, $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_NX_N$, тогда распределение вероятностей Y может быть получено путем свертки отдельных распределений вероятностей [10]. Значения k_p, которые создают интервалы, соответствующие заданным уровням доверия p могут, следовательно, быть рассчитаны по результирующему свернутому распределению.

G.1.5 Если функциональная зависимость между Y и его входными величинами нелинейна, а разложение в ряд Тейлора первого порядка этой зависимости не является допустимым приближением (см. 5.1.2 и 5.1.5), то распределение вероятностей Y не может быть получено путем свертывания распределений входных величин. В таких случаях необходимы другие аналитические или числовые методы.

G.1.6 На практике, поскольку параметры, характеризующие распределение вероятностей входных величин, обычно являются оценками, поскольку нереалистично ожидать, что уровень доверия, связанный с данным интервалом, может быть известен с большой точностью и поскольку свертывание распределений вероятностей дело - очень сложное, такие свертывания реализуются редко, если вообще реализуются, когда есть потребность рассчитать интервалы, имеющие заданные уровни доверия. Вместо этого, используются приближения, которые обладают преимуществами Центральной Предельной Теоремы.

G.2 Центральная Предельная Теорема

G.2.1 Если $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_NX_N = \sum_{i=1}^{N} c_i X_i$ и все X_i характеризуются нормальными распределениями, тогда результирующее свернутое распределение Y будет также нормальным. Однако даже если распределения X_i не являются нормальными, то распределение Y часто может быть аппроксимировано нормальным распределением, благодаря Центральной Предельной Теореме. Эта теорема гласит, что распределение Y будет *приблизительно нормальным* с ожиданием $E(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i E(X_i)$ и дисперсией $\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \sigma^2(X_i)$, где $E(X_i)$ - математическое ожидание X_i, а $\sigma^2(X_i)$ - дисперсия X_i, если X_i - независимая случайная величина, а $\sigma^2(Y)$ много больше, чем любая отдельная составляющая $c_i^2\sigma^2(X_i)$ от не нормально распределенной X_i.

G.2.2 Центральная Предельная Теорема имеет особое значение, т.к. она показывает очень важную роль, которую играют дисперсии распределений вероятностей входных величин, по сравнению с той ролью, которую играют моменты более высокого порядка, при определении формы результирующего свернутого распределения величины Y. Более того, она подразумевает, что свернутое распределение стремится к нормальному по мере увеличения числа входных величин, вносящих свой вклад в $\sigma^2(Y)$; что эта сходимость будет тем более быстрой, чем ближе значения величин $c_i^2\sigma^2(X_i)$ друг к другу (это эквивалентно на практике тому, что каждая оценка входной величины x_i, вносит сравнимую неопределенность в неопределен-

ность оценки y измеряемой величины Y); и что чем ближе распределения X_i к нормальному, тем меньше этих X_i необходимо, чтобы получить нормальное распределение для Y.

ПРИМЕР - Прямоугольное распределение (см. 4.3.7 и 4.4.5) является экстремальным примером не нормального распределения, но свертка всего *трех* таких распределений равной ширины является приблизительно нормальной. Если полуширина каждого из трех прямоугольных распределений равняется a с тем, чтобы дисперсия каждого была $a^2/3$, то дисперсия свернутого распределения будет $\sigma^2 = a^2$. 95 и 99 процентные интервалы свернутого распределения определяются, как $1{,}937\sigma$ и $2{,}379\sigma$ соответственно, тогда как аналогичные интервалы для нормального распределения с таким же стандартным отклонением σ определяются, как $1{,}960\sigma$ и $2{,}576\sigma$ (см. таблицу G.1) [10].

ПРИМЕЧАНИЯ

1 Для каждого интервала с уровнем доверия p большим, чем примерно 91,7 процентов, значение k_p для нормального распределения больше соответствующего значения для распределения, возникающего в результате свертки любого количества и размера прямоугольных распределений.

2 Из Центральной Предельной Теоремы следует, что распределение вероятностей среднего арифметического $\overline{q}$ из n наблюдений q_k случайной переменной q с ожиданием μ_q и конечным стандартным отклонением σ приближается к нормальному распределению со средним μ_q и стандартным отклонением $\sigma/\sqrt{n}$ при $n \to \infty$, каким бы ни было распределение вероятностей q.

G.2.3 Практическое следствие применения Центральной Предельной Теоремы заключается в том, что когда может быть установлено, что ее требования приблизительно удовлетворены, в частности, если суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$ не доминируется составляющей стандартной неопределенности, полученной из оценивания по типу А на основе всего нескольких наблюдений, или составляющей стандартной неопределенности, полученной из оценивания по типу В на основе предполагаемого равномерного распределения; тогда разумно в качестве первого приближения для расчета расширенной неопределенности $U_p = k_p u_c(y)$, которая обеспечивает уровень доверия p, использовать для k_p значение из нормального распределения. Значения, наиболее часто используемые для этой цели, приведены в таблице G.1.

G.3 t-распределение и степени свободы

G.3.1 Чтобы получить приближение лучшее, чем простое использование значения k_p из нормального распределения, как в G.2.3, следует признать, что расчет интервала, имеющего заданный уровень доверия, требует не распределения переменной $[Y - E(Y)]/\sigma(Y)$, а распределения переменной $(y - Y)/u_c(y)$. Это происходит потому, что на практике все, что обычно имеется в наличии, это: y - оценка Y, полученная из $y = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$, где x_i - оценка X_i; и суммарная дисперсия, связанная с y, $u_c^2(y)$, вычисленная из $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)$, где $u(x_i)$ - стандартная неопределенность (оцененное стандартное отклонение) оценки x_i.

ПРИМЕЧАНИЕ - Строго говоря, в выражении $(y-Y)/u_c(y)$ Y следует понимать, как $E(Y)$. Для простоты такое различие было сделано только в нескольких местах данного *Руководства*. Вообще, один и тот же символ был использован для физической величины, случайной переменной, которая представляет эту величину, и для ожидания этой переменной (см. 4.1.1, примечания).

G.3.2 Если z - нормально распределенная случайная переменная с ожиданием μ_z и стандартным отклонением σ, а $\overline{z}$ - среднее арифметическое n независимых наблюдений z_k величины z с $s(\overline{z})$ - экспериментальным стандартным отклонением от $\overline{z}$ [см. уравнения (3) и (5) в

4.2], то распределение переменной $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$ есть **t-распределение** или **распределение Стьюдента** (C.3.8) с $\nu = n - 1$ степенями свободы.

Следовательно, если измеряемая величина Y есть просто единственная нормально распределенная величина X, $Y=X$; и если в качестве оценки X берется среднее арифметическое $\bar{X}$ от n независимых наблюдений X_k величины X с экспериментальным стандартным отклонением среднего $s(\bar{X})$, то наилучшей оценкой Y является $y = \bar{X}$ и экспериментальное стандартное отклонение этой оценки есть $u_c(y) = s(\bar{X})$. Тогда $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z}) = (\bar{X} - X)/ s(\bar{X}) = (y - Y)/ u_c(y)$ распределена в соответствии с t-распределением с

$$\Pr[-t_p(\nu) \le t \le t_p(\nu)] = p \qquad \text{(G.1a)}$$

или

$$\Pr[-t_p(\nu) \le (y - Y)/u_c(y) \le t_p(\nu)] = p, \qquad \text{(G.1b)}$$

что можно переписать, как:

$$\Pr[y - t_p(\nu)u_c(y) \le Y \le y + t_p(\nu)u_c(y)] = p. \qquad \text{(G.1c)}$$

В этих выражениях Pr[ ] означает "вероятность [ ]", а $t_p(\nu)$ есть значение t для данного значения ν - числа степеней свободы (см. G.3.3) – такое, что часть p t-распределения охвачена интервалом $[-t_p(\nu),+t_p(\nu)]$. Таким образом, расширенная неопределенность

$$U_p = k_p u_c(y) = t_p(\nu)u_c(y) \qquad \text{(G.1d)}$$

определяет интервал от $y - U_p$ до $y + U_p$, что удобно записывать, как $Y = y \pm U_p$, который, как можно ожидать, включает часть p распределения значений, которые обоснованно могли бы быть приписаны Y, а p - вероятность охвата или уровень доверия интервала.

G.3.3 Число степеней свободы ν равно $n - 1$ для единственной величины, оцененной средним арифметическим из n независимых наблюдений, как указано в G.3.2. Если n независимых наблюдений используются для определения наклона и места пересечения прямой линии методом наименьших квадратов, то числом степеней свободы их стандартных неопределенностей будет $\nu = n - 2$. При вычислении методом наименьших квадратов m параметров по n наблюдениям число степеней свободы каждого параметра составит $\nu = n - m$ (см. [15] для дальнейшего рассмотрения числа степеней свободы).

G.3.4 Некоторые значения $t_p(\nu)$ для различных значений ν и различных значений p приведены в таблице G.2 в конце данного приложения. По мере того, как $\nu \to \infty$, t-распределение приближается к нормальному и $t_p(\nu) \approx (1+2/\nu)^{1/2} k_p$, где k_p - коэффициент охвата, необходимый для получения интервала с уровнем доверия p для нормально распределенной переменной. Таким образом, значение $t_p(\infty)$ в таблице G.2 для данного p равно значению k_p в таблице G.1 для того же p.

ПРИМЕЧАНИЕ - Часто t-распределение приводится в таблицах в квантилях; даются значения $t_{1-\alpha}$, где

$$1 - \alpha = \int_{-\infty}^{t_{1-\alpha}} f(t,\nu)dt$$

есть квантиль. Таким образом, $t_p(\nu)$ и $t_{1-\alpha}(\nu)$ связаны соотношением $p=1 - 2\alpha$. Например, $t_{1-\alpha}(\nu)$, соответствующее $1-\alpha = 0{,}975$ квантилю ($\alpha = 0{,}025$), - то же самое, что и $t_p(\nu)$ для $p = 0{,}95$.

G.4 Число эффективных степеней свободы

G.4.1 В общем случае t-распределение не будет описывать распределение переменной $(y - Y)/u_c(y)$, если $u_c^2(y)$ есть сумма двух или более оцененных составляющих дисперсии $u_i^2(y) = c_i^2 u^2(x_i)$ (см. 5.1.3), даже если каждое x_i - оценка нормально распределенной входной величины X_i. Однако распределение этой переменной может быть аппроксимировано t-распределением при числе *эффективных* степеней свободы ν_{eff}, полученном из формулы Велча - Саттерсвейта [16, 17, 18]:

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{eff}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i} \qquad \text{(G.2a)}$$

или

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \qquad \text{(G.2b)}$$

при

$$\nu_{eff} \le \sum_{i=1}^{N} \nu_i \,, \qquad \text{(G.2c)}$$

где $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)$ (см. 5.1.3). Расширенная неопределенность $U_p = k_p u_c(y) = t_p(\nu_{eff}) u_c(y)$, таким образом, обеспечивает интервал $Y = y \pm U_p$, имеющий приблизительный уровень доверия p.

ПРИМЕЧАНИЯ

1 Если значение ν_{eff}, полученное из уравнения (G.2b), не является целым числом, что обычно будет иметь место на практике, то соответствующее значение t_p может быть найдено из таблицы G.2 путем интерполяции или путем уменьшения ν_{eff} до ближайшего целого числа.

2 Если входная оценка x_i сама получена из двух или более других оценок, то значение ν_i, которое следует использовать с $u_i^4(y) = \left[c_i^2 u^2(x_i)\right]^2$ в знаменателе уравнения (G.2b), есть число эффективных степеней свободы, рассчитанное из выражения, эквивалентного уравнению (G.2b).

3 В зависимости от нужд потенциальных пользователей результата измерения возможно полезно дополнительно к ν_{eff} рассчитать и сообщить также значения ν_{effA} и ν_{effB}, вычисленные из уравнения (G.2b) при отдельной обработке стандартных неопределенностей, полученных из оценивания по типу А и по типу В. Если вклады в $u_c^2(y)$ стандартных неопределенностей, оцененных отдельно по типу А и В, обозначены, соответственно, как $u_{cA}^2(y)$ и $u_{cB}^2(y)$, то упомянутые величины связаны соотношениями:

$$u_c^2(y) = u_{cA}^2(y) + u_{cB}^2(y)\,,$$

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{eff}} = \frac{u_{cA}^4(y)}{\nu_{effA}} + \frac{u_{cB}^4(y)}{\nu_{effB}}\,.$$

ПРИМЕР - Допустим, что $Y = f(X_1, X_2, X_3) = bX_1X_2X_3$ и что оценки x_1, x_2, x_3 нормально распределенных входных величин X_1, X_2, X_3 суть арифметические средние от $n_1 = 10$, $n_2 = 5$, $n_3 = 15$ независимых повторных наблюдений соответственно, при относительных стандартных неопределенностях $u(x_1)/x_1 = 0{,}25$ %, $u(x_2)/x_2 = 0{,}57$ %, $u(x_3)/x_3 = 0{,}82$ %. В этом случае $c_i = \partial f / \partial X_i = Y / X_i$ (оцененные при x_1, x_2, x_3 - см. 5.1.3, примечание 1), $\left[u_c(y)/y\right]^2 = \sum_{i=1}^{3} \left[u(x_i)/x_i\right]^2 = (1{,}03\ \%)^2$ (см. примечание 2 к 5.1.6) и уравнение (G.2b) становится:

$$\nu_{eff} = \frac{\left[u_c(y)/y\right]^4}{\sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\left[u(x_i)/x_i\right]^4}{\nu_i}}\,.$$

Таким образом,

$$\nu_{eff} = \frac{1{,}03^4}{\frac{0{,}25^4}{10-1} + \frac{0{,}57^4}{5-1} + \frac{0{,}82^4}{15-1}} = 19{,}0\,.$$

Значение t_p для $p = 95$ % и $\nu = 19$ (из таблицы G.2): $t_{95}(19) = 2{,}09$. Следовательно, относительная расширенная неопределенность для этого уровня доверия составляет $U_{95} = 2{,}09 \times (1{,}03\ \%) = 2{,}2$ процента. Можно, таким образом, утверждать, что $Y = y \pm U_{95} = y(1 \pm 0{,}022)$ (y определяется из $y = bx_1x_2x_3$), или, что $0{,}978\, y \le Y \le 1{,}022\, y$, или, что уровень доверия, связанный с этим интервалом, составляет приблизительно 95 процентов.

G.4.2 На практике $u_c(y)$ зависит от стандартных неопределенностей $u(x_i)$ входных оценок как нормально, так и не нормально распределенных входных величин, и $u(x_i)$ получают на основе распределений вероятностей как основанных на частоте, так и *априорных* (т.е. как из оцененных по типу А, так и по типу В). Аналогичное утверждение применимо к оценке y и оценкам входных величин x_i , от которых y зависит. Тем не менее, распределение вероятностей функции $t = (y - Y)/u_c(y)$ может быть аппроксимировано t - распределением, если оно разложено в ряд Тейлора около ожидания. В действительности, это именно то, что достигается, в приближении самого низкого порядка по формуле Велча - Саттерсвейта, уравнение (G.2a) или уравнение (G.2b).

Возникает вопрос относительно числа степеней свободы, приписываемых стандартной неопределенности, оцененной по типу В, когда ν_{eff} рассчитывается по уравнению (G.2b). Так как соответствующее определение числа степеней свободы предполагает, что ν , как оно проявляется в t-распределении, является мерой неопределенности дисперсии $s^2(\bar{z})$, то уравнение (E.7) в E.4.3 может быть использовано для определения числа степеней свободы ν_i :

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2}. \quad \text{(G.3)}$$

Величина в больших скобках есть относительная неопределенность $u(x_i)$; для оценивания стандартной неопределенности по типу В - это субъективная величина, значение которой получают путем научного суждения, основанного на всей сумме доступной информации.

ПРИМЕР - Допустим, что чье-то знание о том, как определялась входная величина x_i и как оценивалась стандартная неопределенность $u(x_i)$, приводит к тому, что он считает, что значение $u(x_i)$ надежно примерно на 25 процентов. Это может означать, что относительная неопределенность составляет $\Delta u(x_i)/u(x_i) = 0{,}25$ и, следовательно, из уравнения (G.3) $\nu_i = (0{,}25)^{-2}/2 = 8$. Если вместо этого некто решил, что значение $u(x_i)$ надежно только примерно на 50 процентов, тогда $\nu_i = 2$ (см. также таблицу E.1 в приложении E).

G.4.3 При обсуждении в 4.3 и 4.4 оценивания стандартной неопределенности по типу В на основе *априорного* распределения вероятностей в неявной форме допускалось, что значение $u(x_i)$, полученное в результате такого оценивания, известно точно. Например, когда $u(x_i)$ получают из прямоугольного распределения вероятностей с полушириной $a = (a_+ - a_-)/2$, как в 4.3.7 и 4.4.5, то $u(x_i) = a/\sqrt{3}$ рассматривается в качестве константы без неопределенности, т.к. a_+ и a_-, а, следовательно, и a рассматриваются именно так (но см. 4.3.9, примечание 2). Это означает, в соответствии с уравнением (G.3), что $\nu_i \to \infty$ или $1/\nu_i \to 0$, но это не создает никаких трудностей при оценивании по уравнению (G.2b). Кроме того, допущение, что $\nu_i \to \infty$ не является неизбежно нереалистичным; общей практикой является выбор a_- и a_+ таким образом, чтобы вероятность нахождения величины, представляющей интерес, вне интервала от a_- до a_+ была исчезающе малой.

G.5 Другие соображения

G.5.1 Выражение, встречаемое в литературе по вопросам оценивания неопределенности измерения и часто используемое для получения неопределенности, обеспечивающей 95 процентный интервал доверия, может быть записано, как:

$$U'_{95} = \left[t_{95}^2(\nu'_{eff})s^2 + 3u^2\right]^{1/2}. \quad \text{(G.4)}$$

Здесь $t_{95}(\nu'_{eff})$ взято из t-распределения для числа степеней свободы ν'_{eff} и p = 95 процентов; ν'_{eff} - число эффективных степеней свободы, рассчитанное из формулы Велча- Саттерсвейта [уравнение (G.2b)] с учетом *только* тех составляющих стандартной неопределенности s_i , которые были оценены статистически на основе повторных наблюдений в *осуществляемом* измерении; s^2 =

$\sum c_i^2 s_i^2$; $c_i \equiv \partial f / \partial x_i$; и $u^2 = \sum u^2(y) = = \sum c_j^2 (a/3)$ оценивают *все* другие составляющие неопределенности, где предполагается, что $+a_j$ и $-a_j$ - точно известные верхняя и нижняя границы X_j относительно ее наилучшей оценки x_j (т.е. $x_j - a_j \le X_j \le x_j + a_j$).

ПРИМЕЧАНИЕ - Составляющая неопределенности, основанная на повторных наблюдениях, сделанных *вне* осуществляемого измерения, оценивается таким же образом как и любая другая составляющая, включенная в u^2. Следовательно, для того, чтобы сделать содержательное сравнение уравнений (G.4) и (G.5) следующего подраздела, предполагается, что такие составляющие, если они присутствуют, пренебрежимо малы.

G.5.2 Если расширенная неопределенность, которая обеспечивает интервал с 95 процентным уровнем доверия, оценивается согласно методам, рекомендованным в G.3 и G.4, то результирующее выражение вместо уравнения (G.4) будет:

$$U_{95} = t_{95}(\nu_{eff})\left[s^2 + u^2\right]^{1/2}, \qquad (G.5)$$

где ν_{eff} рассчитывается из уравнения (G.2b) и расчет включает *все* составляющие неопределенности.

В большинстве случаев значение U_{95} из уравнения (G.5) будет больше, чем значение U'_{95} из уравнения (G.4), если предполагать, что при расчете по уравнению (G.5) все дисперсии по типу B получены из *априорных* прямоугольных распределений с такими же полуширинами, что и границы a_j , используемые для расчета u^2 из уравнения (G.4). Это можно понять, имея в виду, что, хотя $t_{95}(\nu'_{eff})$ в большинстве случаев будет несколько больше, чем $t_{95}(\nu_{eff})$, оба коэффициента близки к 2; и в уравнении (G.5) u^2 умножается на $t^2{}_p(\nu_{eff}) \approx 4$, тогда как в уравнении (G.4) оно умножается на 3. Хотя два эти выражения дают одинаковые значения U'_{95} и U_{95} для $u^2 << s^2$, U'_{95} будет на 13 % меньше, чем U_{95} , если $u^2 >> s^2$. Таким образом, в общем случае уравнение (G.4) дает неопределенность, обеспечивающую уровень доверия меньше, чем у интервала, заданного расширенной неопределенностью, рассчитанной из уравнения (G.5).

ПРИМЕЧАНИЯ

1 При предельном переходе $u^2/s^2 \to \infty$ и $\nu_{eff} \to \infty$ $U'_{95} \to 1{,}732\ u$, тогда как $U_{95} \to 1{,}960\ u$. В этом случае U'_{95} обеспечивает интервал, имеющий всего 91,7 процентный уровень доверия, в то время как U_{95} дает 95 процентный интервал. Этот случай приблизительно осуществляется на практике, когда составляющие, полученные из оценок верхней и нижней границ, доминируют, являются численно большими и имеют значения $u_j^2(y) = c_j^2 a_j^2 / 3$ сравнимого размера.

2 Для нормального распределения коэффициент охвата $k = \sqrt{3} \approx 1{,}732$ обеспечивает интервал с уровнем доверия $p = 91{,}673$ процента. Это значение p является устойчивым в том смысле, что оно в сравнении с любыми другими значениями оптимальным образом независимо от небольших отклонений распределения входных величин от нормального.

G.5.3 Бывает, что входная величина X_i распределена асимметрично - отклонения от ее ожидаемого значения одного знака более вероятны, чем отклонения другого знака (см. 4.3.8). Хотя это не имеет никакого значения при оценивании стандартной неопределенности $u(x_i)$ оценки x_i величины X_i и, значит, при оценивании $u_c(y)$, это, тем не менее, может повлиять на расчет U.

Обычно бывает удобно давать симметричный интервал $Y = y \pm U$, если интервал не такой, что существует значительная разница между отклонениями разных знаков. Если асимметрия X_i вызывает только небольшую асимметрию в распределении вероятностей, характеризуемом результатом измерения y и его суммарной стандартной неопределенностью $u_c(y)$, то вероятность, потерянная на одной стороне при установлении симметричного интервала, компенсируется вероятностью, полученной на другой стороне. Альтернатива состоит в том, чтобы давать интервал, симметричный по вероятности (и, следовательно, асимметричный по U): вероятность того, что Y лежит ниже нижней границы $y - U_-$, равна вероятности того, что Y лежит выше верхней границы $y + U_+$. Но для того, чтобы устанавливать такие границы, потребуется больше информации, чем простые оценки y и $u_c(y)$ [и, следовательно, больше информации, чем просто оценки x_i и $u(x_i)$ каждой входной величины X_i].

G.5.4 Оценивание расширенной неопределенности U_p, данное здесь в значениях $u_c(y)$, ν_{eff} и коэффициента $t_p(\nu_{eff})$ из t-распределения, является только аппроксимацией, и она имеет свои ограничения. Распределение $(y - Y)/u_c(y)$ дается t-распределением, только если распределение Y нормально, оценка y и ее суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$ являются независимыми и если распределение $u_c^2(y)$ есть χ^2 распределение. Введение ν_{eff} [уравнение (G.2b)], имеет дело только с последней проблемой и обеспечивает приблизительное χ^2 распределение для $u_c^2(y)$; другая часть проблемы, возникающая из-за не нормальности распределения Y, требует рассмотрения более высоких моментов в дополнение к дисперсии.

G.6 Резюме и выводы

G.6.1 Коэффициент охвата k_p, который обеспечивает интервал с уровнем доверия p, близким к заданному, может быть найден, лишь когда имеются обширные знания о распределении вероятностей каждой входной величины, и эти распределения "объединены" для получения распределения выходной величины. Входные оценки x_i и их стандартные неопределенности $u(x_i)$ сами по себе являются недостаточными для этой цели.

G.6.2 Поскольку громоздкие вычисления, необходимые для "объединения" распределений вероятностей, редко оправдываются количеством и надежностью имеющейся информации, то допускается аппроксимация распределения выходной величины. Благодаря Центральной Предельной Теореме, обычно бывает достаточно допустить, что распределение вероятностей $(y - Y)/u_c(y)$ есть t-распределение, и принять $k_p = t_p(\nu_{eff})$ с коэффициентом t, основанном на числе эффективных степеней свободы ν_{eff} для $u_c(y)$, полученном из формулы Велча - Саттерсвейта, уравнение (G.2b).

G.6.3 Чтобы получить ν_{eff} из уравнения (G.2b), необходимо знать число степеней свободы ν_i для каждой составляющей стандартной неопределенности. Для составляющей, оцененной по типу А, ν_i получают из ряда независимых повторных наблюдений, на основе которых сделана оценка соответствующей входной величины, и из числа независимых величин, определяемых по этим наблюдениям (см. G.3.3). Для составляющей, оцененной по типу В, ν_i получают из суждения о надежности значения этой составляющей [см. G.4.2 и уравнение (G.3)].

G.6.4 Таким образом, ниже приводится резюме предлагаемого метода расчета расширенной неопределенности $U_p = k_p u_c(y)$, предназначенной для обеспечения интервала $Y = y \pm U_p$, имеющего уровень доверия, приблизительно равный p:

1) Получите y и $u_c(y)$, как описано в разделах 4 и 5.

2) Вычислите ν_{eff} из формулы Велча - Саттерсвейта, т.е. по уравнению (G.2b) (повторяемому здесь для удобства):

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}. \qquad \text{(G.2b)}$$

Если $u(x_i)$ получено из оценивания по типу А, определите ν_i, как указано в G.3.3. Если $u(x_i)$ получено из оценивания по типу В и его можно считать точно известным, что часто бывает на практике, то $\nu_i \to \infty$; в ином случае оцените ν_i из уравнения (G.3).

3) Найдите t-коэффициент $t_p(\nu_{eff})$ для требуемого уровня доверия p из таблицы G.2. Если ν_{eff} не целое число, то или интерполируйте, или уменьшите его до ближайшего целого числа.

4) Примите $k_p = t_p(\nu_{eff})$ и рассчитайте $U_p = k_p u_c(y)$.

G.6.5 В некоторых ситуациях, которые не должны слишком часто встречаться на практике, условия Центральной Предельной Теоремы могут быть выполнены не очень хорошо, и подход раздела G.6.4 может привести к неприемлемому результату. Например, если в $u_c(y)$ доминирует составляющая неопределенности, оцененная из прямоугольного распределения, границы которого по допущению точно известны, возможно [если $t_p(\nu_{eff}) > \sqrt{3}$], что $y + U_p$ и $y - U_p$, т.е. верхняя и нижняя границы интервала, определенного U_p, могли бы лежать вне границ распределения вероятностей выходной величины Y. С такими случаями следует иметь дело на индивидуальной основе, но часто они поддаются приблизительному анализу (включая, например, свертывание нормального распределения с прямоугольным [10]).

G.6.6 Для многих практических случаев измерений в широком диапазоне областей превалируют следующие условия:

- оценку y измеряемой величины Y получают из оценок x_i значительного числа входных величин X_i, которые описываются хорошо ведущими себя распределениями вероятностей (такими, как нормальное и прямоугольное);
- стандартные неопределенности $u(x_i)$ этих оценок, которые могут быть получены как из оценивания по типу А, так и из оценивания по типу В, дают сопоставимые вклады в суммарную стандартную неопределенность $u_c(y)$ результата измерения y:
- линейная аппроксимация, предполагаемая законом распространения неопределенностей, - адекватна (см. 5.1.2 и Е.3.1);
- неопределенность $u_c(y)$ достаточно мала, так как число эффективных степеней свободы ν_{eff} имеет значительную величину, скажем - больше 10.

При таких обстоятельствах можно допустить, что распределение вероятностей, характеризуемое результатом измерения и его суммарной стандартной неопределенностью, может считаться нормальным, благодаря Центральной Предельной Теореме: и $u_c(y)$ может быть принята как разумно надежная оценка стандартного отклонения этого нормального распределения из-за значительной величины ν_{eff}. Следовательно, принимая во внимание обсуждение, проведенное в данном приложении, и подчеркивая рассуждения о приблизительном характере процедуры оценивания неопределенности и непрактичности попыток различать интервалы с разницей уровней доверия в 1 или 2 процента, можно поступать следующим образом:

Примите $k = 2$ и предположите, что $U = 2u_c(y)$ определяет интервал, имеющий уровень доверия приблизительно 95 процентов; или, для более критических приложений, $k = 3$ и $U = 3u_c(y)$ определяет интервал, имеющий уровень доверия приблизительно 99 процентов.

Хотя этот подход пригоден для многих практических измерений, его применимость к каждому конкретному измерению будет зависеть от того, насколько близко $k = 2$ к $t_{95}(\nu_{eff})$ или $k = 3$ к $t_{99}(\nu_{eff})$; то есть, насколько близок уровень доверия для интервала, определенного $U = 2u_c(y)$ или $U = 3u_c(y)$ к 95 или 99 процентам соответственно. Хотя для $\nu_{eff} = 11$ $k = 2$ и $k = 3$ недооценивает $t_{95}(11)$ и $t_{99}(11)$ всего на 10 и 4 процента соответственно (см. таблицу G.2), в некоторых случаях это может быть неприемлемо. Далее, для всех значений ν_{eff}, больших 13, $k = 3$ определяет интервал с уровнем доверия, большим, чем 99 процентов (см. таблицу G.2, которая также показывает, что для $\nu_{eff} \to \infty$ уровни доверия для интервалов, определяемых $k = 2$ и $k = 3$, суть 95,45 и 99,73 процентов соответственно). Таким образом, на практике то, какого размера ν_{eff} и что требуется от расширенной неопределенности, будет определять, может ли быть использован данный подход.

Таблица G.2 - Значения $t_p(\nu)$ из t- распределения для числа степеней свободы ν, которые определяют интервал от $-t_p(\nu)$ до $+t_p(\nu)$, накрывающий часть p этого распределения

Число степеней свободы ν	Часть p в процентах					
	68,27[a]	90	95	95,45[a]	99	99,73[a]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

[a] Для величины z, описываемой нормальным распределением с ожиданием μ_z и стандартным отклонением σ, интервал $\mu_z \pm k\sigma$ накрывает p = 68,27; 95,45 и 99,73 процентов распределения для k = 1, 2 и 3 соответственно.

Приложение Н

Примеры

В этом приложении приводится 6 примеров от Н.1 до Н.6, которые детально проработаны, чтобы проиллюстрировать основные принципы, представленные в этом *Руководстве* для оценивания и выражения неопределенности измерения. Вместе с примерами, включенными в основной текст, а также в некоторые другие приложения, они должны дать возможность пользователям данного *Руководства* внедрить эти принципы в практику своей собственной работы.

Поскольку примеры даются в качестве иллюстрации, то по необходимости они были упрощены. Кроме того, так как сами примеры и числовые данные, используемые в них, выбирались, в основном, таким образом, чтобы продемонстрировать основные принципы этого *Руководства,* то ни приведенные примеры, ни эти данные необязательно должны интерпретироваться как описывающие реальные измерения. Хотя данные используются в том виде, как приведены, чтобы предотвратить погрешности округления, в промежуточных вычислениях сохраняется больше цифр, чем обычно показывают. Таким образом, указанный результат вычисления, включающий несколько величин, может слегка отличаться от результата, вытекающего из численных значений, приведенных в тексте для этих величин.

Ранее в этом *Руководстве* указывалось, что классификация методов вычисления составляющих неопределенности по типу А и В используется только для удобства; она не требуется для определения суммарной стандартной неопределенности или расширенной неопределенности результата измерения, так как все составляющие неопределенности, как бы они не оценивались, рассматриваются одним и тем же образом (см. 3.3.4, 5.1.2 и Е 3.7). Таким образом, в примерах метод, используемый для оценивания конкретной составляющей неопределенности, не идентифицирует составляющую специально по ее типу. Однако из обсуждения будет ясно, получена составляющая из оценивания по типу А или В.

Н.1 Калибровка концевой меры длины

Этот пример показывает, что даже явно простая задача измерения может включать тонкие аспекты оценивания неопределенности.

Н.1.1 Измерительная задача

Длину концевой меры номинальной длиной 50 мм определяют путем сравнения ее с известным эталоном той же самой номинальной длины. Прямой результат сличения этих двух концевых мер длины есть разница d в их длинах:

$$d = l(1+\alpha\theta) - l_S(1+\alpha_S\theta_S)\ ,\text{(H.1)}$$

где

l- измеряемая величина, т.е. длина при 20°C калибруемой концевой меры длины;

l_S- длина эталона при 20°C, приведенная в сертификате о калибровке;

α и α_S - коэффициенты теплового расширения калибруемой концевой меры длины и эталона соответственно;

θ и θ_S - *отклонения* температуры от исходной 20° С концевой меры длины и эталона соответственно.

Н.1.2 Математическая модель

Исходя из уравнения (Н.1), измеряемая величина дается уравнением:

$$l = \frac{l_S(1+\alpha_S\theta_S)+d}{1+\alpha\theta} \qquad (\text{H.2})$$

$$= l_S + d + l_S(\alpha_S\theta_S - \alpha\theta) + \ldots$$

Если разность температуры между калибруемой концевой мерой и эталоном записать в виде $\delta\theta = \theta - \theta_S$, а разность их коэффициентов теплового расширения, как $\delta\alpha = \alpha - \alpha_S$, то уравнение (Н.2) принимает вид:

$$l = f(l_S, d, \alpha_S, \theta, \delta\alpha, \delta\theta) \qquad (\text{H.3})$$

$$= l_S + d - l_S[\delta\alpha\cdot\theta + \alpha_S\delta\theta].$$

Результаты оценивания показали, что разности $\delta\theta$ и $\delta\alpha$ равны нулю, но не их неопределенности; предполагается, что $\delta\alpha$, α_S, $\delta\theta$, θ являются некоррелированными (если бы измеряемая величина была выражена через переменные θ, θ_S, α и α_S, то было бы необходимо включить корреляцию между θ и θ_S и между α и α_S).

Таким образом, из уравнения (Н.3) следует, что оценку значения измеряемой величины l можно получить из простого выражения $l_S + \bar{d}$, где l_S - длина эталона при 20°С, приведенная в сертификате о калибровке, а d - оценена по $\bar{d}$, среднему арифметическому из n = 5 независимых повторных наблюдений. Суммарную стандартную неопределенность $u_c(l)$ значения l получают, подставив уравнение (10), приведенное в 5.1.2, в уравнение (Н.3), как описано ниже.

ПРИМЕЧАНИЕ - В этом и других примерах для простоты обозначения один и тот же символ используется для величины и ее оценки.

Н.1.3 Влияющие дисперсии

Соответствующие аспекты этого примера, описанные здесь и в следующих подразделах, суммированы в таблице Н.1.

Так как предполагается, что $\delta\alpha = 0$ и $\delta\theta = 0$, то подстановка уравнения (10) из 5.1.2 в уравнение (Н.3) дает

$$u_c^2(l) = c_S^2u^2(l_S) + c_d^2u^2(d) + c_{\alpha_S}^2u^2(\alpha_S)$$

$$+ c_\theta^2u^2(\theta) + c_{\delta\alpha}^2u^2(\delta\alpha) + c_{\delta\theta}^2u^2(\delta\theta), \quad (\text{H.4})$$

где

$$\begin{aligned}
c_S &= \partial f/\partial l_S = 1-(\delta\alpha\cdot\theta + \alpha_S\cdot\delta\theta) = 1,\\
c_d &= \partial f/\partial d = 1,\\
c_{\alpha_S} &= \partial f/\partial\alpha_S = -l_S\delta\theta = 0,\\
c_\theta &= \partial f/\partial\theta = -l_S\delta\alpha = 0,\\
c_{\delta\alpha} &= \partial f/\partial\delta\alpha = -l_S\theta,\\
c_{\delta\theta} &= \partial f/\partial\delta\theta = -l_S\alpha_S
\end{aligned}$$

и, таким образом,

$$u_c^2(l) = u^2(l_S) + u^2(d) \qquad (\text{H.5})$$

$$+ l_S^2\theta^2u^2(\delta\alpha) + l_S^2\alpha_S^2u^2(\delta\theta).$$

Н.1.3.1 Неопределенность калибровки эталона, $u(l_S)$

Сертификат о калибровке дает в качестве расширенной неопределенности эталона U = 0,075 мкм и указывает, что это значение было получено с использованием коэффициент охвата k=3. Тогда стандартная неопределенность есть:

$$u(l_S) = (0{,}075\,мкм)/3 = 25\,нм.$$

Н.1.3.2 Неопределенность измеренной разности длин, $u(l_S)$

Суммарное экспериментальное стандартное отклонение, характеризующее сличение l и l_S, определялось из изменчивости 25 независимых повторных наблюдений разности длин двух концевых мер и составило 13 нм. При сличениях в этом примере проводилось 5 повторных наблюдений. Стандартная неопределенность, связанная со средним арифметическим этих показаний, тогда есть (см. 4.2.4):

$$u(\bar{d}) = s(\bar{d}) = (13нм)/\sqrt{5} = 5{,}8нм.$$

Согласно свидетельству о калибровке компаратора, используемого для сличения l и l_S, его неопределенность, "обусловленная случайными погрешностями", составляет ±0,01 мкм при уровне доверия 95 процентов и основана на 6 повторных измерениях; таким образом, стандартная неопределенность, с использованием t-коэффициента $t_{95}(5) = 2{,}57$ для ν=6-1=5 степеней свободы (см. приложение G, таблица G.2), будет:

$$u(d_1) = (0{,}01мкм)/2{,}57 = 3{,}9нм.$$

Неопределенность компаратора, "обусловленная систематическими погрешностями", в сертификате дается равной 0,02 мкм на "уровне трех сигма". Поэтому стандартную неопределенность, вызванную этой причиной, можно принять,как:

$$u(d_2) = (0{,}02мкм)/3 = 6{,}7нм.$$

Общий вклад получают из суммы оцененных дисперсий:

$$u^2(d) = u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 93нм^2$$

или

$$u(d) = 9{,}7 \text{ нм}.$$

H.1.3.3 Неопределенность коэффициента теплового расширения, $u(\alpha_s)$

Коэффициент теплового расширения эталонной концевой меры длины дается, как $\alpha_S = 11{,}5 \times 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$ с неопределенностью, представленной прямоугольным распределением с границами $\pm\ 2 \times 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$. Тогда стандартная неопределенность (см. уравнение (7) в 4.3.7):

$$u(\alpha_S) = (2\times10^{-6}\ {}^0C^{-1})/\sqrt{3} = \\ = 1{,}2\times10^{-6}\ {}^0C^{-1}.$$

Поскольку $c_{\alpha_S} = \partial f/\partial\alpha_S = -l_S\delta\theta = 0$, как указано в H.1.3, эта неопределенность ничего не вносит в неопределенность l первого порядка. Однако она вносит в нее вклад второго порядка, что обсуждается в H.1.7.

H.1.3.4 Неопределенность отклонения температуры концевой меры длины, $u(\theta)$

Утверждается, что температура испытательной ванной поддерживается (19,9 ± 0,5) ^{0}C; при этом температура в момент отдельного наблюдения не записывается. Говорится, что указанное максимальное отклонение Δ = 0,5 ^{0}C представляет собой амплитуду приблизительно циклического изменения температуры в термостатической системе, а не неопределенность средней температуры. Значение отклонения средней температуры

$$\bar{\theta} = 19{,}9°C - 20°C = -0{,}1°C$$

само имеет стандартную неопределенность, обусловленную неопределенностью средней температуры испытательной ванной:

$$u(\bar{\theta}) = 0{,}2°C,$$

Таблица Н.1 - Сводная таблица составляющих стандартной неопределенности

Составляющая стандартной неопределенности $u(x_i)$	Источник неопределенности	Значение стандартной неопределенности $u(x_i)$	$c_i \equiv \partial f / \partial x_i$	$u_i(l) \equiv \lvert c_i \rvert u(x_i)$ (нм)	Степени свободы
$u(l_S)$	Калибровка эталонной концевой меры	25 нм	1	25	18
$u(d)$	Измеренное расхождение между концевыми мерами длины	9,7 нм	1	9,7	25,6
$u(\bar{d})$	повторные наблюдения	5,8 нм			24
$u(d_1)$	случайные эффекты компаратора	3,9 нм			5
$u(d_2)$	систематические эффекты компаратора	6,7 нм			8
$u(\alpha_S)$	Коэффициент теплового расширения эталонной концевой меры длины	$1{,}2\times10^{-6}$ °C	0	0	
$u(\theta)$	Температура испытательной ванны	0,41 °C	0	0	
$u(\bar{\theta})$	Средняя температура ванны	0,2 °C			
$u(\Delta)$	Циклическое изменение температуры в комнате	0,35 °C			
$u(\delta\alpha)$	Разность коэффициентов расширения концевых мер длины	$0{,}58\times10^{-6}$ °C^{-1}	$-l_S\theta$	2,9	50
$u(\delta\theta)$	Разность температур концевых мер длины	0,029 °C	$-l_S\alpha_S$	16,6	2
					$u_c^2(l) = \sum u_i^2(l) = 1002 нм^2$ $u_c(l) = 32 нм$ $\nu_{eff}(l) = 16$

в то время как циклическое изменение во времени создает U - образное (арксинусное) распределение температур, дающее в результате стандартную неопределенность

$$u(\Delta) = (0{,}5\,°\mathrm{C}) / \sqrt{2} = 0{,}35\,°\mathrm{C}.$$

Отклонение температуры θ можно взять равным $\bar{\theta}$, и стандартная неопределенность получается из уравнения:

$$u^2(\theta) = u^2(\bar{\theta}) + u^2(\Delta) = 0{,}165\,°\mathrm{C}^2,$$

которое дает

$$u(\theta) = 0{,}41\,°\mathrm{C}.$$

Так как $c_\theta = \partial f / \partial\theta = -l_S\delta\alpha = 0$, как указано в Н.1.3, то эта неопределенность также не вносит никакого вклада в неопределенность l в первом порядке, но она вносит вклад второго порядка, что описано в Н.1.7.

H.1.3.5 Неопределенность разности коэффициентов расширения, $u(\delta\alpha)$

Оцененные границы для изменчивости $\delta\alpha$ следующие: $\pm 1\times 10^{-6}$ °C^{-1} с равной вероятностью того, что $\delta\alpha$ будет иметь любое значение в пределах этих границ. Стандартная неопределенность равняется

$$u(\delta\alpha) = (1\times 10^{-6}\,°\mathrm{C}^{-1})/\sqrt{3} = 0{,}58\times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}.$$

H.1.3.6 Неопределенность разности температур концевых мер длины, $u(\delta\theta)$

Предполагают, что эталонная и испытуемая концевые меры длины находятся при одной и той же температуре, но разность температур с одинаковой вероятностью может иметь любое значение в оцененном интервале от −0,05 °C до +0,05 °C. Стандартная неопределенность равняется:

$$u(\delta\theta) = (0{,}05\ °\mathrm{C})/\sqrt{3} = 0{,}029\ °\mathrm{C}.$$

H.1.4 Суммарная стандартная неопределенность

Суммарную стандартную неопределенность $u_c(l)$ вычисляют из уравнения (H.5). Собирают отдельные члены, подставляют в это выражение и получают:

$$u_c^2(l) = (25 нм)^2 + (9{,}7 нм)^2 \quad (\mathrm{H.6a})$$
$$+ (0{,}05 м)^2(-0{,}1\ °\mathrm{C})^2(0{,}58\times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1})^2$$
$$+ (0{,}05 м)^2(11{,}5\times 10^{-6}\,°\mathrm{C}^{-1})^2(0{,}029\ °\mathrm{C})^2$$
$$= (25 нм)^2 + (9{,}7 нм)^2 \quad (\mathrm{H.6b})$$
$$+ (2{,}9 нм)^2 + (16{,}6 нм)^2 = 1002 нм^2$$

или

$$u_c(l) = 32 нм. \quad (\mathrm{H.6c})$$

Очевидно, что доминирующей составляющей неопределенности является неопределенность эталона, $u(l_S)$=25 нм.

H.1.5 Окончательный результат

Сертификат о калибровке эталонной концевой меры длины дает l_S = 50,000623 мм как ее длину при 20°C. Среднее арифметическое $\overline{d}$ пяти повторных наблюдений разности длин неизвестной и эталонной концевых мер составляет 215 нм. Таким образом, т.к. $l = l_S + \overline{d}$ (см. H.1.2), то длина l неизвестной концевой меры длины при 20°C составляет 50,000 838 мм. Исходя из 7.2.2, окончательный результат можно представить в следующем виде:

> l=50,000 838 мм с суммарной стандартной неопределенностью u_c=32 нм. Соответствующая относительная суммарная стандартная неопределенность составляет u_c/l=$6{,}4\times 10^{-7}$.

H.1.6 Расширенная неопределенность

Предположим, что требуется получить расширенную неопределенность $U_{99} = k_{99}u_c(l)$, которая обеспечивает интервал с уровнем доверия приблизительно 99 процентов. Процедура, которую надо использовать, та же самая, что обобщена в G.6.4, а требуемые степени свободы указаны в таблице H.1. Они были получены следующим образом:

1) *Неопределенность калибровки эталона,* $u(l_S)$ [H.1.3.1]. В сертификате о калибровке указывается, что число эффективных степеней свободы суммарной стандартной неопределенности, для которого была получена указанная расширенная неопределенность, составляет $\nu_{eff}(l_S)$=18.

2) *Неопределенность измеренной разности длин,* $u(d)$ [H.1.3.2]. Хотя $\overline{d}$ было получено из пяти повторных наблюдений, потому что $u(\overline{d})$ получено из суммарного экспериментального стандартного отклонения, основанного на 25 наблюдениях,

число степеней свободы $u(\bar{d})$ составляет $\nu(\bar{d})$=25–1=24 (см. H.3.6, примечание). Число степеней свободы $u(d_1)$ неопределенности, обусловленной случайными эффектами на компараторе, составляет $\nu(d_1)$=6–1=5, так как d_1 было получено из шести повторных измерений. Можно предположить, что значение неопределенности ±0,02 мкм для систематических эффектов, обусловленных компаратором, является надежным на 25 процентов и, таким образом, число степеней свободы из уравнения (G.3) в G.4.2 есть $\nu(d_2)$=8 (см. пример в G.4.2). Тогда число эффективных степеней свободы $u(d)$, $\nu_{eff}(d)$, получают из уравнения (G.2b), приведенного в G.4.1:

$$\nu_{eff}(d)=\frac{\left[u^2(\bar{d})+u^2(d_1))+u^2(d_2)\right]^2}{\dfrac{u^4(\bar{d})}{\nu(\bar{d})}+\dfrac{u^4(d_1)}{\nu(d_1)}+\dfrac{u^4(d_2)}{\nu(d_2)}}$$

$$=\frac{(9{,}7нм)^4}{\dfrac{(5{,}8нм)^4}{24}+\dfrac{(3{,}9нм)^4}{5}+\dfrac{(6{,}7нм)^4}{8}}=25{,}6$$

3) *Неопределенность разности коэффициентов расширения,* $u(\delta\alpha)$ [H.1.3.5]. Оцененные границы $\pm1\times10^{-6}$ °C^{-1} для изменчивости $\delta\alpha$ полагают надежными на 10 процентов. Это дает из уравнения (G.3) в G.4.2 $\nu(\delta\alpha)$=50.

4) *Неопределенность разности температур концевых мер длины,* $u(\delta\theta)$ [H.1.3.6]. Предполагается, что оцененный интервал от –0,05°C до +0,05°C для разности температур $\delta\theta$ является надежным только на 50 процентов, что из уравнения (G.3) в G.4.2 дает $\nu(\delta\theta)$=2.

Вычисление $\nu_{eff}(l)$ из уравнения (G.2b) в G.4.1 осуществляется точно таким же образом, как и вычисление $\nu_{eff}(d)$ в 2), описанном выше. Таким образом, из уравнения (H.6b) и (H.6c) и значений для ν, данных в 1)÷4),

$$\nu_{eff}(l)=\frac{(32нм)^4}{\dfrac{(25нм)^4}{18}+\dfrac{(9{,}7нм)^4}{25{,}6}+\dfrac{(2{,}9нм)^4}{50}+\dfrac{(16{,}6нм)^4}{2}}$$

$$=16{,}7.$$

Для получения требуемой расширенной неопределенности это значение уменьшается до следующего меньшего целого числа, $\nu_{eff}(l)$=16. Затем, из таблицы G.2 в приложении G следует, что $t_{99}(16)$ = 2,92, и поэтому $U_{99} = t_{99}(16)u_c(l)$ = 2,92×(32 нм) = 93 нм. Согласно 7.2.4 окончательный результат измерения может быть указан, как:

l=(50,000 838 ± 0,000 093) мм, где число, следующее за символом ± , есть численное значение расширенной неопределенности $U=ku_c$, а U определяется из суммарной стандартной неопределенности u_c=32 нм и коэффициента охвата k=2,92, основанного на t - распределении для ν=16 степеней свободы, и определяет оцененный интервал с уровнем доверия 99 процентов. Соответствующая относительная расширенная неопределенность составляет U/l = $1{,}9\times10^{-6}$.

H.1.7 Члены второго порядка

В примечании к 5.1.2 указывается, что уравнение (10), которое используется в этом примере для получения суммарной стандартной неопределенности $u_c(l)$, должно быть дополнено, когда нелинейность функции $Y = f(X_1, X_2,..., X_N)$ настолько значительна, что членами второго порядка в разложении в ряд Тейлора нельзя пренебречь. Именно такой является ситуация в этом примере и поэтому оценка $u_c(l)$, описанная выше, не является полной. Применение выражения, данного в примечании к 5.1.2, в уравнении (H.3) добавляет два члена второго порядка, которыми нельзя пренебречь, к уравнению (H.5). Эти члены, которые возникают из члена второй степени в выражении, приведенном в примечании, следующие:

$$l_S^2 u^2(\delta\alpha) u^2(\theta) + l_S^2 u^2(\alpha_S) u^2(\delta\theta),$$

но только первый из этих членов вносит значимый вклад в $u_c(l)$:

$$l_S\, u(\delta\alpha)\, u(\theta) = (0{,}05\ \text{м})\ (0{,}58\times10^{-6}\ {}^\circ\text{C}^{-1}) \times(0{,}41{}^\circ\text{C}) = 11{,}7\ \text{нм},$$

$$l_S\, u(\alpha_S)\, u(\delta\theta) = (0{,}05\ \text{м})\ (1{,}2\times10^{-6}\ {}^\circ\text{C}^{-1}) \times(0{,}029\ {}^\circ\text{C}) = 1{,}7\ \text{нм}.$$

Члены второго порядка увеличивают $u_c(l)$ с 32 нм до 34 нм.

H.2 Одновременное измерение активного и реактивного сопротивлений

Этот пример демонстрирует обработку множества измеряемых величин или выходных величин, определяемых одновременно при одном и том же измерении, и корреляцию их оценок. В примере рассматриваются только случайные изменения наблюдений; в действительной практике неопределенности поправок на систематические эффекты также будут вносить вклад в неопределенность результатов измерения. Данные анализируются двумя различными способами, но оба дают, по существу, одни и те же цифровые значения.

H.2.1 Измерительная задача

Активное сопротивление R и реактивное сопротивление X элемента цепи определяют путем измерения амплитуды V синусоидально изменяющейся разности потенциалов на его выводах, амплитуды I переменного тока, проходящего через него, и угла сдвига фаз Φ переменной разности потенциалов относительно переменного тока. Таким образом, тремя входными величинами являются V, I и Φ, а тремя выходными (измеряемыми) величинами являются три составляющие импеданса: R, X и Z. Так как $Z^2=R^2+X^2$, то имеется только две независимые выходные величины.

H.2.2 Математическая модель и данные

Измеряемые величины связаны с входными величинами законом Ома:

$$R = \frac{V}{I}\sin\Phi;\; X = \frac{V}{I}\sin\Phi;\; Z = \frac{V}{I} \quad \text{(H.7)}$$

Предполагается, что пять независимых рядов одновременных наблюдений этих трех входных величин V, I и Φ получены в одинаковых условиях (см. B.2.15), а результаты этих наблюдений приведены в таблице H.2. Здесь же даны средние арифметические наблюдений и экспериментальные стандартные отклонения этих средних, вычисленные из уравнений (3) и (5) в 4.2. Средние значения берутся в качестве наилучших оценок ожидаемых значений входных величин, а экспериментальные стандартные отклонения являются стандартными неопределенностями этих средних.

Вследствие того, что средние значения $\overline{V},\overline{I}$ и $\overline{\Phi}$ получают из одновременных наблюдений, они коррелированы, и эти корреляции должны приниматься во внимание при вычислении стандартных неопределенностей измеряемых величин R, X и Z. Требуемые коэффициенты корреляции легко получают из уравнения (14) в 5.2.2, используя значения $s(\overline{V},\overline{I})$, $s(\overline{V},\overline{\Phi})$ и $s(\overline{I},\overline{\Phi})$, вычисленные из уравнения (17) в 5.2.3. Результаты включены в таблицу H.2, где следует помнить, что $r(x_i,x_j)=r(x_j,x_i)$ и $r(x_i,x_j)=1$.

H.2.3 Результаты: первый способ анализа

Результаты анализа данных первым способом сведены в таблицу H.3.

Значения трех измеряемых величин R, X и Z получают из зависимостей, данных в уравнении (H.7), используя средние значения $\overline{V},\overline{I}$ и $\overline{\Phi}$, приведенные в таблице H.2 для V, I и Φ. Стандартные неопределенности R, X и Z получают из уравнения (16) в 5.2.2, т.к., как указывалось выше, входные величины $\overline{V},\overline{I}$ и $\overline{\Phi}$ коррелированы. В качестве примера рассмотрим $Z=\overline{V}/\overline{I}$. При отождествлении $\overline{V}$ с x_1, $\overline{I}$ с x_2 и f с $Z=\overline{V}/\overline{I}$ уравнение (16) в 5.2.2 для суммарной неопределенности Z дает:

$$u_c^2(Z) = \left[\frac{1}{\overline{I}}\right]^2 u^2(\overline{V}) + \left[\frac{\overline{V}}{\overline{I}^2}\right]^2 u^2(\overline{I}) \quad \text{(H.8a)}$$

$$+\,2\left[\frac{1}{\overline{I}}\right]\left[-\frac{\overline{V}}{\overline{I}^2}\right] u(\overline{V})\,u(\overline{I})\,r(\overline{V},\overline{I})$$

$$= Z^2\left[\frac{u(\overline{V})}{\overline{V}}\right]^2 + Z^2\left[\frac{u(\overline{I})}{\overline{I}}\right]^2 \quad (\text{H.8b})$$
$$- 2Z^2\left[\frac{u(\overline{V})}{\overline{V}}\right]\left[\frac{u(\overline{I})}{\overline{I}}\right] r(\overline{V},\overline{I})$$

или

$$u_{c,r}^2(\overline{Z}) = u_r^2(\overline{V}) + u_r^2(\overline{I}) \qquad (\text{H.8c})$$
$$- 2u_r(\overline{V})u_r(\overline{I})r(\overline{V},\overline{I}),$$

где $u(\overline{V}) = s(\overline{V}), u(\overline{I}) = s(\overline{I})$, а подстрочный индекс "$r$" в последнем выражении показывает, что u является относительной неопределенностью. Подставив соответствующие числовые значения из таблицы Н.2 в уравнение (Н.8а), получаем $u_c(Z)$=0,236 Ω.

Поскольку эти три измеряемые или выходные величины зависят от тех же самых входных величин, то они тоже коррелированы. Элементы ковариационной матрицы, которая описывает эту корреляцию, можно записать, в общем случае, как:

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}u(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j), \quad (\text{H.9})$$

Таблица Н.2 - Значения входных величин V, I и Φ, полученные из пяти рядов наблюдений

Номер ряда k	Входные величины		
	V (В)	I (мА)	Φ (рад)
1	5,007	19,663	1,0456
2	4,994	19,639	1,0438
3	5,005	19,640	1,0468
4	4,990	19,685	1,0428
5	4,999	19,678	1,0433
Среднее арифметическое	$\overline{V} = 4{,}9990$	$\overline{I} = 19{,}6610$	$\overline{\Phi} = 1{,}04446$
Экспериментальное стандартное отклонение среднего	$s(\overline{V}) = 0{,}0032$	$s(\overline{I}) = 0{,}0095$	$s(\overline{\Phi}) = 0{,}00075$
Коэффициенты корреляции			
$r(\overline{V},\overline{I}) = -0{,}36$			
$r(\overline{V},\overline{\Phi}) = 0{,}86$			
$r(\overline{I},\overline{\Phi}) = -0{,}65$			

где $y_l = f_l(x_1, x_2,..., x_N)$ и $y_m = f_m(x_1, x_2,..., x_N)$. Уравнение (Н.9) является обобщением уравнения (F.2) в F.1.2.3, когда q_l в этом выражении коррелированы. Оцененные коэффициенты корреляции выходных величин, как указано в уравнении (14) в 5.2.2, определяются следующим образом: $r(y_l, y_m) = u(y_l, y_m)/u(y_l)u(y_m)$. Следует признать, что диагональные элементы ковариационной матрицы $u(y_l, y_l) \equiv u^2(y_l)$ являются оценками дисперсий выходных величин y_l (см. 5.2.2, примечание 2) и что для $m=l$ уравнение (Н.9) идентично уравнению (16) в 5.2.2.

Чтобы применить уравнение (Н.9) к настоящему примеру, принимаются следующие обозначения:

$y_1 = R$ $\qquad x_1 = \overline{V}$ $\qquad u(x_i) = s(x_i)$

$y_2=X$ $x_2=\overline{I}$ $N=3$

$y_3=Z$ $x_3=\overline{\Phi}$

Результаты вычислений *R*, *X* и *Z*, оценок их дисперсий и коэффициентов корреляции даны в таблице Н.3.

Н.2.4 Результаты: второй способ анализа

Результаты анализа данных вторым способом сведены в таблицу Н.4.

Так как данные были получены в виде пяти рядов наблюдений трех входных величин *V*, *I* и *Φ*, то можно вычислить значения *R*, *X* и *Z* из *каждого ряда* входных данных, а затем взять среднее арифметическое этих пяти значений для получения наилучших оценок *R*, *X* и *Z*. Экспериментальное стандартное отклонение каждого среднего значения (которое является его суммарной стандартной неопределенностью) затем вычисляют из пяти отдельных значений обычным способом [уравнение (5) в 4.2.3]; и оцененные ковариации этих трех средних значений вычисляют, используя уравнение (17) в 5.2.3 непосредственно к пяти отдельным значениям, из которых получают каждое среднее значение. В результатах, полученных этими двумя способами, нет расхождений в значениях выходных величин, стандартных неопределенностей и оценок ковариаций, за исключением эффектов второго порядка, связанных с заменой таких членов как $\overline{V}/\overline{I}$ или $\cos\overline{\Phi}$ на $\overline{V/I}$ или $\overline{\cos\Phi}$.

Чтобы продемонстрировать этот способ, в таблице Н.4 даны значения *R*, *X* и *Z*, вычисленные в каждом из пяти рядов наблюдений. Затем средние арифметические, стандартные неопределенности и оцененные коэффициенты корреляции непосредственно вычислялись из этих отдельных значений. Числовые результаты, полученные таким образом, незначительно отличаются от результатов, данных в таблице Н.3.

По терминологии примечания к 4.1.4 второй способ является примером получения оценки y из $\overline{Y} = (\sum_{k=1}^{n} Y_k)/n$, в то время как первый способ является примером получения y из $y = f(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_N})$. Как указывается в этом примечании, обычно эти два способа дают *одинаковые* результаты, если f является линейной функцией своих входных величин (при условии, что экспериментально наблюдаемые коэффициенты корреляции принимаются во внимание, когда применяется первый способ). Если f не является линейной функцией, тогда результаты, полученные первым способом, будут отличаться от результатов, полученных вторым способом, в зависимости от степени нелинейности, оцененных дисперсий и ковариаций X_i. Это можно видеть из выражения:

$$y=f(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_N}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{X_i}\partial \overline{X_j}}u(\overline{X_i}, \overline{X_j}) + \ldots, \quad (\text{Н.10})$$

где второй член справа является членом второго порядка при разложении в ряд Тейлора величины f по $\overline{X_i}$ (см. также 5.1.2, примечание). В данном случае предпочтение отдается второму способу, т.к. данный способ избегает аппроксимации $y=f(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_N})$ и лучше отражает использованную процедуру измерения - то, что данные фактически были собраны в ряды.

С другой стороны, второй способ будет неподходящим, если данные таблицы Н.2 представляют $n_1=5$ наблюдений разности потенциалов *V*, за которыми следуют $n_2=5$ наблюдений тока *I*, затем $n_3=5$ наблюдений фазы *Φ*; и невозможным если $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ (фактически это плохая измерительная процедура - проводить измерение таким способом, т.к. разность потенциалов на полном сопротивлении и ток, идущий через него, непосредственно взаимосвязаны).

Если данные, приведенные в таблице Н.2 истолковать заново таким образом, чтобы второй способ оказался неприемлемым, и если предположить, что корреляции между величинами V, I и Φ отсутствуют, то коэффициенты наблюдаемых корреляций не будут значимыми и их следует установить равными нулю. Если это сделать в таблице Н.2, то уравнение (Н.9) сводится к эквиваленту уравнения (F.2) в F.1.2.3, а именно:

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} u^2(x_i), \qquad (\text{H.11})$$

и его применение к данным таблицы Н.2 приведет к изменениям в таблице Н.3, показанным в таблице Н.5.

Таблица Н.5 - Изменения в таблице Н.3 в предположении, что коэффициентов корреляции таблицы Н.2 равны нулю

Суммарная стандартная неопределенность результата измерения $u_c(y_l)$
$u_c(R)=0{,}195\ \Omega$ $u_c(R)/R=0{,}15\times10^{-2}$
$u_c(X)=0{,}201\ \Omega$ $u_c(X)/X=0{,}09\times10^{-2}$
$u_c(Z)=0{,}204\ \Omega$ $u_c(Z)/Z=0{,}08\times10^{-2}$
Коэффициенты корреляции $r(y_l, y_m)$
$r(y_1, y_2)=r(R, X)=0{,}056$ $r(y_1, y_3)=r(R, Z)=0{,}527$ $r(y_2, y_3)=r(X, Z)=0{,}878$

Таблица Н.3 - Вычисленные значения выходных величин R, X и Z: первый способ

Номер измеряемой величины l	Соотношения между оценкой измеряемой величины y_l и входными величинами x_i	Значение оценки y_l, являющейся результатом измерения,	Суммарная стандартная неопределенность $u_c(y_l)$ результата измерения
1	$y_1=R=(\overline{V}/\overline{I})\cos\overline{\Phi}$	$y_l=R=127{,}732\ \Omega$	$u_c(R)=0{,}071\ \Omega$ $u_c(R)/R=0{,}06\times10^{-2}$
2	$y_2=X=(\overline{V}/\overline{I})\sin\overline{\Phi}$	$y_2=X=219{,}847\ \Omega$	$u_c(X)=0{,}295\ \Omega$ $u_c(X)/X=0{,}13\times10^{-2}$
3	$y_3=Z=\overline{V}/\overline{I}$	$y_3=Z=254{,}260\ \Omega$	$u_c(Z)=0{,}236\ \Omega$ $u_c(Z)/Z=0{,}09\times10^{-2}$
Коэффициенты корреляции $r(y_l, y_m)$			
$r(y_1, y_2)= r(R, X)=-0{,}588$ $r(y_1, y_3)= r(R, Z)=-0{,}485$ $r(y_2, y_3)= r(X, Z)= 0{,}993$			

Таблица Н.4 - Вычисленные значения выходных величин R, X и Z: второй способ

Номер ряда k	Индивидуальные значения измеряемых величин		
	$R=(V/I)\cos\Phi$ (Ω)	$X=(V/I)\sin\Phi$ (Ω)	$Z=V/I$ (Ω)
1	127,67	220,32	254,64
2	127,89	219,79	254,29
3	127,51	220,64	254,84
4	127,71	218,97	253,49
5	127,88	219,51	254,04
Среднее арифметическое	$y_1=\overline{R}=127{,}732$	$y_2=\overline{X}=219{,}847$	$y_3=\overline{Z}=254{,}260$
Экспериментальное стандартное отклонение среднего	$s(\overline{R})=0{,}071$	$s(\overline{X})=0{,}295$	$s(\overline{Z})=0{,}236$
Коэффициенты корреляции $r(y_l, y_m)$			
$r(y_1, y_2)=r(\overline{R},\overline{X})=-0{,}588$ $r(y_1, y_3)=r(\overline{R},\overline{Z})=-0{,}485$ $r(y_2, y_3)=r(\overline{X},\overline{Z})=0{,}993$			

H.3 Калибровка термометра

Этот пример иллюстрирует использование метода наименьших квадратов для получения линейной градуировочной кривой, а также: как параметры аппроксимации - пересечение и наклон, их оцененные дисперсии и ковариации, используются для получения из кривой значений и стандартной неопределенности предсказанной поправки.

H.3.1 Измерительная задача

Термометр калибруется путем сравнения $n = 11$ показаний температуры t_k термометра, каждое из которых имеет незначительную неопределенность, с соответствующими известными опорными температурами $t_{R,k}$ в диапазоне температур от 21 °C до 27 °C для получения поправок $b_k = t_{R,k} - t_k$ в показаниях. *Измеренные* поправки b_k и *измеренные* температуры t_k являются входными величинами при оценивании. Линейная градуировочная кривая

$$b(t) = y_1 + y_2\,(t - t_0) \qquad \text{(H.12)}$$

аппроксимирует измеренные поправки и температуры методом наименьших квадратов. Параметры y_1 и y_2, которые являются, соответственно, пересечением и наклоном калибровочной кривой, представляют собой две измеряемые или выходные величины, подлежащие определению. Температура t_0 является удобно выбранной точной опорной температурой; она не является независимым параметром, который надо определять методом наименьших квадратов. После того, как найдены y_1 и y_2 вместе с их оцененными дисперсиями и ковариациями, уравнение (H.12) может быть использовано для предсказания значения поправки и ее стандартной неопределенности, которую надо внести в показания термометра для любого значения температуры t.

H.3.2 Определение параметров аппроксимации методом наименьших квадратов

Основываясь на методе наименьших квадратов и при выполнении предположений, сделанных в H.3.1, выходные величины y_1 и y_2 и их оцененные дисперсии и ковариации получают путем минимизации суммы

$$S = \sum_{k=1}^{n}\left[b_k - y_1 - y_2(t_k - t_0)\right]^2$$

Это дает следующие уравнения для y_1, y_2, их экспериментальных дисперсий $s^2(y_1)$ и $s^2(y_2)$ и их оцененного коэффициента корреляции $r(y_1, y_2) = s(y_1, y_2)/s(y_1)\,s(y_2)$, где $s(y_1, y_2)$ является их оцененной ковариацией:

$$y_1 = \frac{(\sum b_k)(\sum \theta_k^2) - (\sum b_k\theta_k)(\sum \theta_k)}{D}, \qquad \text{(H.13a)}$$

$$y_2 = \frac{n\sum b_k\theta_k - (\sum b_k)(\sum \theta_k)}{D}, \qquad \text{(H.13b)}$$

$$s^2(y_1) = \frac{s^2\sum \theta_k^2}{D}, \qquad \text{(H.13c)}$$

$$s^2(y_2) = n\frac{s^2}{D}, \qquad \text{(H.13d)}$$

$$r(y_1, y_2) = -\frac{\sum \theta_k}{\sqrt{n\sum \theta_k^2}}, \qquad \text{(H.13e)}$$

$$s^2 = \frac{\sum\left[b_k - b(t_k)\right]^2}{n-2}, \qquad \text{(H.13f)}$$

$$D = n\sum \theta_k^2 - (\sum \theta_k)^2 \qquad \text{(H.13g)}$$

$$= n\sum(\theta_k - \bar{\theta})^2 = n\sum(t_k - \bar{t})^2,$$

где все суммы по k от 1 до n, $\theta_k = t_k - t_0$, $\bar{\theta} = (\sum\theta_k)/n$ и $\bar{t} = (\sum t_k)/n$; $[b_k - b(t_k)]$ - разность между измеренной или наблюдаемой поправкой b_k при температуре t_k и поправкой $b(t_k)$, предсказанной аппроксимирующей кривой $b(t) = y_1 + y_2 (t - t_0)$ при t_k. Дисперсия s^2 является мерой общей неопределенности аппроксимации, где коэффициент $n - 2$ отражает тот факт, что поскольку два параметра y_1 и y_2 определяются на основе n наблюдений, то число степеней свободы s^2 есть $\nu = n - 2$ (см. G.3.3).

Н.3.3 Вычисление результатов

Данные, которые надо аппроксимировать, даны во 2-ой и 3-ей колонках в таблице Н.6. Принимая $t_0 = 20$ °С в качестве опорной температуры, применение уравнения (Н.13а) к (Н.13д) дает:

$y_1 = -0{,}1712$ °С $s(y_1) = 0{,}0029$ °С,

$y_2 = 0{,}00218$ $s(y_2) = 0{,}00067$,

$r(y_1, y_2) = -0{,}930$ $s = 0{,}0035$ °С.

Таблица Н.6 Данные, используемые для получения линейной градуировочной кривой термометра методом наименьших квадратов

Номер показания k	Показания термометра t_k (°С)	Наблюдаемая поправка $b_k = t_{R,k} - t_k$ (°С)	Предсказанная поправка $b(t_k)$ (°С)	Разность между наблюдаемой и предсказанной поправками $b_k - b(t_k)$ (°С)
1	21,521	- 0,171	- 0,1679	- 0,0031
2	22,012	- 0,169	- 0,1668	- 0,0022
3	22,512	- 0,166	- 0,1657	- 0,0003
4	23,003	- 0,159	- 0,1646	+ 0,0056
5	23,507	- 0,164	- 0,1635	- 0,0005
6	23,999	- 0,165	- 0,1625	- 0,0025
7	24,513	- 0,156	- 0,1614	+ 0,0054
8	25,002	- 0,157	- 0,1603	+ 0,0033
9	25,503	- 0,159	- 0,1592	+ 0,0002
10	26,010	- 0,161	- 0,1581	- 0,0029
11	26,511	- 0,160	- 0,1570	- 0,0030

Тот факт, что наклон y_2 более, чем в 3 раза, превосходит его стандартную неопределенность, служит показанием того, что требуется градуировочная кривая, а не фиксированная усредненная поправка.

Тогда градуировочную кривую можно представить в виде:

$$b(t) = -0{,}1712(29)\ °\mathrm{C} + 0{,}00218(67)(t - 20\ °\mathrm{C}), \qquad (\text{Н.14})$$

где числа в скобках представляют собой численные значения стандартных неоп

ределенностей, отнесенные к соответствующим последним цифрам указанных результатов для пересечения и наклона (см. 7.2.2). Это уравнение дает предсказанное значение поправки $b(t)$ при любой температуре t, и, в частности, значение $b(t_k)$ при $t = t_k$. Эти значения даны в 4-ом столбце таблицы, тогда как в последнем столбце даны разности между измеренными и предсказанными значениями $b_k - b(t_k)$. Анализ этих разностей можно использовать для проверки обоснованности линейной модели; существуют формальные тесты (см. [8]), но в этом примере они не рассматриваются.

Н.3.4 Неопределенность предсказанного значения

Выражение для суммарной стандартной неопределенности предсказанного значения поправки можно легко получить, применяя закон распространения неопределенности, уравнение (16) в 5.2.2, к уравнению (Н.12). Отметив, что $b(t) = f(y_1, y_2)$ и записав $u(y_1) = \delta(y_1)$ и $u(y_2) = \delta(y_2)$, получим:

$$u_c^2\left[b(t)\right] = u^2(y_1) + (t_1 - t_0)^2 u^2(y_2) +$$

$$+ 2(t - t_0)u(y_1)u(y_2)r(y_1, y_2)\,. \quad \text{(Н.15)}$$

Оцененная дисперсия $u_c^2\left[b(t)\right]$ является минимальной при $t_{\min} = t_0 - u(y_1)r(y_1,y_2)/u(y_2)$, которая в данном случае равна $t_{\min} = 24{,}0085$ °С.

В качестве примера использования уравнения (Н.15) предположим, что требуется поправка на показания термометра и ее неопределенность при t = 30 °С, которая находится за пределами температурного диапазона, в котором термометр был в действительности откалиброван. Подстановка t = 30 °С в уравнение (Н.14) дает:

$$b(30\text{ °C}) = -\,0{,}1494\text{ °C},$$

а уравнение (Н.15) становится

$$u_c^2[b(30\text{ °C})] = (0{,}0029\text{ °C})^2 +$$

$$+(10\text{ °C})^2(0{,}00067)^2 +$$

$$+2(10\text{ °C})(0{,}0029\text{ °C})(0{,}00067)(-0{,}930) =$$

$$= 17{,}1\times10^{-6}\text{ °C}^2$$

или

$$u_c[b(30\text{ °C})] = 0{,}0041\text{ °C}.$$

Таким образом, поправка при 30 °С равняется -0,1494 °С с суммарной стандартной неопределенностью u_c = 0,0041 °С и $\nu = n - 2 = 9$ степенями свободы.

Н.3.5 Исключение корреляции между наклоном и пересечением

Уравнение (Н.13е) для коэффициента корреляции $r(y_1, y_2)$ подразумевает, что, если t_0 выбрано таким образом, что $\sum_{k=1}^{n}\theta_k = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_0) = 0$, то $r(y_1, y_2) = 0$ и y_1 и y_2 будут некоррелированы, тем самым упрощая вычисление стандартной неопределенности предсказанной поправки. Поскольку $\sum_{k=1}^{n}\theta_k = 0$, когда $t_0 = \bar{t} = \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)/n$, и в данном случае $\bar{t}$ = 24,0085 °С, то повторная аппроксимация методом наименьших квадратов при $t_0 \to \bar{t}$ = 24,0085°С приведет к значениям y_1 и y_2, которые являются некоррелированными (температура $\bar{t}$ является также температурой, при которой $u^2[b(t)]$ минимальна - см. Н.3.4). Однако повторная аппроксимация не является необходимой, потому что это может быть показано уравнениями

$$b(t) = y_1' + y_2(t - \bar{t})\,, \qquad \text{(Н.16a)}$$

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1') + (t - \bar{t})^2 u^2(y_2)\,, \qquad \text{(Н.16b)}$$

$$r(y_1', y_2) = 0\,, \qquad \text{(Н.16c)}$$

где

$$y_1' = y_1 + y_2(\bar{t} - t_0)\,,$$

$$\bar{t} = t_0 - s(y_1)r(y_1, y_2)/s(y_2)\,,$$

$$s^2(y_1') = s^2(y_1)[1 - r^2(y_1, y_2)]\,,$$

а при записи уравнения (Н.16b) были сделаны подстановки $u(y_1') = s(y_1')$ и $u(y_2) = s(y_2)$ [см. уравнение (Н.15)].

Применяя эти зависимости к результатам, приведенным в Н.3.3, получаем:

$b(t) = -0{,}1625(11)$ (H.17a)

$+0{,}00218(67)(t - 24{,}0085\ °C),$

$u_c^2[b(t)] = (0{,}0011)^2 +$ (H.17b)

$+(t - 24{,}0085\ °C)^2(0{,}000067)^2.$

Тот факт, что эти выражения дают те же самые результаты, что и уравнения (H.14) и (H.15), можно проверить, повторив вычисление $b(30\ °C)$ и $u_c[b(30\ °C)]$. Подставив $t = 30\ °C$ в уравнения (H.17a) и (H.17b), получим:

$$b(30\ °C) = -0{,}1494\ °C,$$

$$u_c[b(30\ °C)] = 0{,}0041 °C,$$

что идентично результатам, полученным в H.3.4. Оцененную ковариацию между двумя предсказанными поправками $b(t_1)$ и $b(t_2)$ можно получить из уравнения (H.9) в H.2.3.

H.3.6 Другие соображения

Метод наименьших квадратов можно использовать для аппроксимации кривых более высокого порядка по точкам данных; этот метод также применим для случаев, когда точки отдельных данных имеют неопределенности. Для более подробного ознакомления с этим вопросом, следует ознакомиться с [8]. Тем не менее, здесь можно указать следующие два случая, где не предполагается, что измеренные поправки b_k известны точно.

1) Предположим, что каждая t_k имеет пренебрежимо малую неопределенность, пусть каждое из n значений $t_{R,k}$ получают из рядов m повторных показаний и суммарная оценка дисперсии для таких показаний, определенная на основе большого количества данных, полученных в течении нескольких месяцев, есть s_p^2. Тогда оцененная дисперсия каждого $t_{R,k}$ есть $s_p^2/m = u_0^2$, и каждая наблюдаемая поправка $b_k = t_{R,k} - t_k$ имеет *ту же самую* стандартную неопределенность u_0. В этих условиях (и если нет причин предполагать некорректность линейной модели) u_0^2 заменяет s^2 в уравнениях (H.13c) и (H.13d).

ПРИМЕЧАНИЕ - Оценка суммарной дисперсии s_p^2, основанной на ряде из N независимых наблюдений той же случайной переменной, получается из:

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i s_i^2}{\sum_{i=1}^{N} \nu_i},$$

где s_i^2 - экспериментальная дисперсия i-того ряда n_i независимых повторных наблюдений [уравнение (4) в 4.2.2] и имеет число степеней свободы $\nu_i = n_i - 1$. Число степеней свободы s_p^2 есть $\nu = \sum_{i=1}^{N} \nu_i$. Экспериментальная дисперсия s_p^2/m (и экспериментальное стандартное отклонение $s_p/\sqrt{m}$) среднего арифметического m независимых наблюдений, характеризуемых оценкой суммарной дисперсии s_p^2, также имеет ν степеней свободы.

2) Предположим, что каждая t_k имеет пренебрежимо малую неопределенность, что поправка ε_k применяется для каждого из n значений $t_{R,k}$ и что каждая поправка имеет одинаковую стандартную неопределенность u_a. Тогда стандартная неопределенность каждого $b_k = t_{R,k} - t_k$ также является u_a, а $s^2(y_1)$ заменяется на $s^2(y_1) + u_a^2$ и $s^2(y_1')$ - на $s^2(y_1') + u_a^2$.

H.4 Измерение активности

Этот пример похож на пример H.2 об одновременном измерении активного и реактивного сопротивления тем, что данные можно анализировать двумя разными способами, но каждый из них дает существенно одинаковый численный результат. Первый подход еще раз демонстрирует необходимость принимать в расчет наблюдаемые корреляции между входными величинами.

H.4.1 Измерительная задача

Неизвестная концентрация активности радона (^{222}Rn) в образце воды определяется жидкостно - сцинтилляционным счетом по стандартному образцу радона в воде с известной концентрацией активности. Неизвестную концентрацию активности получают путем измерения трех источников счета, состоящих приблизительно из 5 г воды и 12 г сцинтиллятора из органической эмульсии в ампулах объемом 22 мл:

Источник (а) - *стандартный* образец, состоящий из стандартного раствора массой m_s с известной концентрацией активности;

Источник (b) - подобранный *чистый* образец воды, не содержащий радиоактивных веществ, используемый для получения фоновой скорости счета;

Источник (с) - *образец*, состоящий из аликвотной массы m_x с неизвестной концентрацией активности.

Выполняется шесть циклов измерений трех источников счета в следующем порядке: стандартный образец - чистый образец - образец; и каждый интервал счета T_0 с поправкой на мертвое время для каждого источника во время всех шести циклов составляет 60 минут. Хотя нельзя предположить, что фоновая скорость счета остается постоянной на протяжении полного интервала счета (65 часов), предполагается, что числа счета, полученные для каждого чистого образца, можно использовать как представительные для фоновой скорости счета во время измерений стандартного образца и образца в одном и том же цикле. Данные приведены в таблице H.7, где:

t_S, t_B, t_X - значения времени от момента отсчета $t = 0$ до середины интервалов счета $T_0 = 60$ мин (с поправкой на мертвое время) для ампул, соответственно, со стандартным образцом, чистым образцом и образцом; хотя t_B указывается для полноты картины, оно не требуется для анализа;

C_S, C_B, C_x - число импульсов, зарегистрированных во время интервалов счета $T_0 = 60$ мин с поправкой на мертвое время для ампул, соответственно, со стандартным образцом, чистым образцом и образцом.

Наблюдаемые счетные импульсы можно выразить, как:

$$C_S = C_B + \varepsilon A_S T_0 m_S e^{-\lambda t_S}, \qquad \text{(H.18a)}$$

$$C_X = C_B + \varepsilon A_X T_0 m_X e^{-\lambda t_X}, \qquad \text{(H.18b)}$$

где

ε - эффективность обнаружения ^{222}Rn с использованием жидкой сцинтилляции для данного состава источника, предполагаемая независимой от уровня активности;

A_S - концентрация активности стандартного образца на момент отсчета $t = 0$;

A_x - *измеряемая величина*, определяемая как неизвестная концентрация активности образца на момент отсчета $t = 0$;

m_S - масса стандартного раствора;

m_x - масса аликвотного образца;

λ - постоянная распада для ^{222}Rn: $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2} = 1{,}25894 \times 10^{-4}$ мин$^{-1}$ ($T_{1/2} = 5505{,}8$ мин).

Уравнения (H.18a) и (H.18b) показывают, что для шести индивидуальных значений ни C_S, ни C_x, приведенные в таблице H.7, нельзя усреднить непосредственно из-за экспоненциального распада активности стандартного образца и небольших изменений фонового счета от цикла к циклу. Вместо этого необходимо обратиться к счету с поправками на распад и фон (или к скорости счета, определяемой как число импульсов, деленное на $T_0 = 60$ мин). Это предполагает объединение уравнений (H.18a) и (H.18b) для получения следующего выражения для неизвестной концентрации через известные величины:

Таблица H.7 - Счетные данные для определения концентрации активности неизвестного образца

Цикл	Стандартный образец		Чистый образец		Образец	
k	t_S (мин)	C_S (число)	t_B (мин)	C_B (число)	t_x (мин)	C_x (число)
1	243,74	15 380	305,56	4054	367,37	41 432
2	984,53	14 978	1046,10	3922	1107,66	38 706
3	1723,87	14 394	1785,43	4200	1846,99	35 860
4	2463,17	13 254	2524,73	3830	2586,28	32 238
5	3217,56	12 516	3279,12	3956	3340,68	29 640
6	3956,83	11 058	4018,38	3980	4079,94	26 356

$$A_x = f(A_S, m_S, m_x, C_S, C_x, C_B, t_S, t_x, \lambda)$$

$$= A_S \frac{m_S}{m_X} \frac{(C_X - C_B)e^{\lambda t_X}}{(C_S - C_B)e^{\lambda t_S}} \qquad \text{(H.19)}$$

$$= A_S \frac{m_S}{m_X} \frac{C_X - C_B}{C_S - C_B} e^{\lambda(t_X - t_S)},$$

где $(C_X - C_B)\ e^{\lambda t_x}$ и $(C_S - C_B)e^{\lambda t_S}$ являются счетом с поправкой на фон, соответственно, для образца и стандартного образца на момент отсчета $t = 0$ для временного интервала $T_0 = 60$ мин. С другой стороны, можно просто записать:

$$A_x = f(A_S, m_S, m_x, R_S, R_x) \qquad \text{(H.20)}$$

$$= A_S \frac{m_S}{m_X} \frac{R_X}{R_S},$$

где *скорости счета* R_x и R_S с поправкой на фон и распад даны формулами:

$$R_X = \left[(C_X - C_B)/T_0\right]e^{\lambda t_X}, \qquad \text{(H.21a)}$$

$$R_S = \left[(C_S - C_B)/T_0\right]e^{\lambda t_S}. \qquad \text{(H.21b)}$$

H.4.2 Анализ данных

Таблица H.8 суммирует значения скоростей счета R_S и R_x с поправками на фон и распад, рассчитанные по уравнениям (H.21a) и (H.21b), с использованием данных таблицы H.7 и $\lambda = 1{,}25894 \times 10^{-4}$ мин$^{-1}$, как указано выше. Следует отметить, что отношение $R = R_x/R_S$ наиболее легко рассчитать из выражения:

$$\left[(C_X - C_B)/(C_S - C_B)\right]e^{\lambda(t_X - t_S)}.$$

Средние арифметические $\overline{R}_S, \overline{R}_X$ и $\overline{R}$, а также их экспериментальные стандартные отклонения $s(\overline{R}_S)$, $s(\overline{R}_X)$ и $s(\overline{R})$ рассчитываются обычным способом [уравнения (3) и (5) в 4.2]. Коэффициент корреляции $r(\overline{R}_X, \overline{R}_S)$ рассчитывается из уравнения (17) в 5.2.3 и уравнения (14) в 5.2.2.

Из-за относительно небольшой изменчивости значений $\overline{R}_X$ и $\overline{R}_S$ отношение средних $\overline{R}_X / \overline{R}_S$ и стандартная неопределенность $u(\overline{R}_X / \overline{R}_S)$ этого отношения практически совпадают, соответственно, со средним отношением $\overline{R}$ и его экспериментальным стандартным отклонением $s(\overline{R})$, как приведено в последнем столбце таблицы H.8 [см.H.2.4 и уравнение (H.10) в нем]. Однако при расчете стандартной неопределенности $u(\overline{R}_X / \overline{R}_S)$ необходимо учитывать корреляцию между R_x и R_S, представленную коэффициентом корреляции $r(\overline{R}_X, \overline{R}_S)$, используя уравнение (16) в 5.2.2 [это уравнение дает для относительной оцененной дисперсии $\overline{R}_X / \overline{R}_S$ последние три члена уравнения (H.22b).]

Следует признать, что соответствующие экспериментальные стандартные отклонения R_X и R_S, $\sqrt{6}\, s(\overline{R}_X)$ и $\sqrt{6}\, s(\overline{R}_S)$, показывают изменчивость этих величин, которое от 2 до 3 раз больше, чем изменчивость, подразумеваемая статистикой Пуассона для счетного процесса; последняя включена в наблюдаемую изменчивость счета, и ее не нужно учитывать отдельно.

H.4.3 Вычисление окончательных результатов

Получение неизвестной концентрации активности A_X и ее суммарной стандартной неопределенности $u_c(A_X)$ из уравнения (H.20) требует знания A_S, m_S и m_X, а также их стандартных неопределенностей. Они даны, как:

A_S=0,1368 Бк/г,
$u(A_S)$ = 0,0018 Бк/г,
$u(A_S)/A_S = 1{,}32\times10^{-2}$;

m_S = 5,0192 г,
$u(m_S)$ = 0,005 г, $u(m_S)/m_S = 0{,}10\times10^{-2}$;

m_X = 5,0571 г,
$u(m_X)$=0,0010 г; $u(m_X)/m_X=0{,}02\times10^{-2}$.

Другие возможные источники неопределенности оцениваются как пренебрежимо малые:

- стандартные неопределенности времени распада: $u(t_{S,k})$ и $u(t_{X,k})$;
- стандартная неопределенность постоянной распада ^{222}Rn: $u(\lambda) = 1\times10^{-7}$ мин$^{-1}$. (Значимой величиной является коэффициент распада $\exp[\lambda(t_X - t_S)]$, который меняется от 1,01563 для циклов k = 4 и 6 до 1,01570 для цикла k = 1. Стандартная неопределенность этих значений составляет $u = 1{,}2\times10^{-5}$);
- неопределенность, связанная с возможной зависимостью эффективности детектирования сцинтилляционного счетчика от используемого источника (стандартный образец, чистый образец и образец);
- неопределенность поправки на мертвое время счетчика и поправки на зависимость эффективности счета от уровня активности.

H.4.3.1 Результаты: подход 1

Как указано выше, A_x и $u_c(A_x)$ могут быть получены двумя различными путями из уравнения (H.20). При первом подходе A_x вычисляется из средних арифметических $\overline{R}_X$ и $\overline{R}_S$, что дает:

$$A_x = A_S \frac{m_S}{m_X} \frac{\overline{R}_X}{\overline{R}_S} = 0{,}43000 \text{ Бк/г.} \quad \text{(H.22a)}$$

Применение уравнения (16) из 5.2.2 к этому выражению дает суммарную дисперсию $u_c^2(A_x)$:

$$\frac{u_c^2(A_X)}{A_X^2}=\frac{u^2(A_S)}{A_S^2}+\frac{u^2(m_S)}{m_S^2}+\frac{u^2(m_X)}{m_X^2}$$

$$+\frac{u^2(\overline{R}_X)}{\overline{R}_X^2}+\frac{u^2(\overline{R}_S)}{\overline{R}_S^2} \quad \text{(H.22b)}$$

$$-2r(\overline{R}_X,\overline{R}_S)\frac{u(\overline{R}_X)u(\overline{R}_S)}{\overline{R}_X\overline{R}_S},$$

где, как указано в H.4.2, последние три члена дают $u^2(\overline{R}_X/\overline{R}_S)/(\overline{R}_X/\overline{R}_S)^2$ - оцененную относительную дисперсию $\overline{R}_X/\overline{R}_S$. Согласно H.2.4, результаты в таблице 8 показывают, что $\overline{R}$ не точно равно $\overline{R}_X/\overline{R}_S$ и что стандартная неопределенность $u(\overline{R}_X/\overline{R}_S)$ для $\overline{R}_X/\overline{R}_S$ не точно равно стандартной неопределенности $s(\overline{R})$ для $\overline{R}$.

Подстановка значений соответствующих величин в уравнения (H.22a) и (H.22b) дает:

$$\frac{u_c(A_X)}{A_X}=1{,}93\times10^{-2},$$

$$u_c(A_X) = 0{,}0083 \text{ Бк/г}.$$

Результат измерения тогда можно записать, как:

> A_x = 0,4300 Бк/г с суммарной стандартной неопределенностью u_c = 0,0083 Бк/г.

H.4.3.2 Результаты: подход 2

При втором подходе, который избегает корреляцию между $\overline{R}_X$ и $\overline{R}_S$, A_X вычисляется, используя среднее арифметическое $\overline{R}$. Таким образом,

$$A_X=A_S\frac{m_S}{m_X}=0{,}4304 \text{ Бк/г}. \qquad \text{(H.23a)}$$

Выражение для $u_c^2(A_X)$ является просто:

$$\frac{u_c^2(A_X)}{A_X^2}=\frac{u^2(A_S)}{A_S^2}+\frac{u^2(m_S)}{m_S^2} \quad \text{(H.23b)}$$

$$+\frac{u^2(m_X)}{m_X^2}+\frac{u^2(\overline{R})}{\overline{R}^2},$$

что дает

$$\frac{u_c(A_X)}{A_X}=1{,}95\times10^{-2},$$

$$u_c(A_x) = 0{,}0084 \text{ Бк/г}.$$

Результат измерения можно указать, как:

> A_x = 0,4304 Бк/г с суммарной стандартной неопределенностью u_c = 0,0084 Бк/г.

Эффективные степени свободы u_c можно оценить, используя формулу Велча - Саттерсвейта, как показано в H.1.6.

Как и в H.2, из двух результатов предпочтительнее второй, так как он избегает замены среднего значения отношения двух величин на отношение средних значений этих величин; он лучше отражает использованную процедуру измерений - данные, на самом деле, были собраны в различные циклы.

Тем не менее, расхождение между значениями A_x, получающееся при двух подходах, явно мало по сравнению со стандартной неопределенностью, приписываемой каждому из них, и расхождением между двумя стандартными неопределенностями можно полностью пренебречь. Такое соответствие показывает, что два подхода эквивалентны, когда наблюдаемые корреляции учтены должным образом.

Таблица H.8 - Расчет скоростей счета с поправками на распад и фон

<table>
<tr><th>Цикл
k</th><th>R_X
(мин$^{-1}$)</th><th>R_S
(мин$^{-1}$)</th><th>$t_X - t_S$
(мин)</th><th>$R=R_X/R_S$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>652,46</td><td>194,65</td><td>123,63</td><td>3,3520</td></tr>
<tr><td>2</td><td>666,48</td><td>208,58</td><td>123,13</td><td>3,1953</td></tr>
<tr><td>3</td><td>665,80</td><td>211,08</td><td>123,12</td><td>3,1543</td></tr>
<tr><td>4</td><td>655,68</td><td>214,17</td><td>123,11</td><td>3,0615</td></tr>
<tr><td>5</td><td>651,87</td><td>213,92</td><td>123,12</td><td>3,0473</td></tr>
<tr><td>6</td><td>623,31</td><td>194,13</td><td>123,11</td><td>3,2107</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$\overline{R}_X = 652{,}60$
$s(\overline{R}_X) = 6{,}42$
$s(\overline{R}_X)/\overline{R}_X = 0{,}98\times10^{-2}$</td><td>$\overline{R}_S = 206{,}09$
$s(\overline{R}_S) = 3{,}79$
$s(\overline{R}_S)/\overline{R}_S = 1{,}84\times10^{-2}$</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">$\overline{R} = 3{,}170$
$s(\overline{R}) = 0{,}046$
$s(\overline{R})/\overline{R} = 1{,}44\times10^{-2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\overline{R}_X / \overline{R}_S = 3{,}167$
$u(\overline{R}_X / \overline{R}_S) = 0{,}045$
$u(\overline{R}_X / \overline{R}_S)/(\overline{R}_X / \overline{R}_S) = 1{,}42\times10^{-2}$</td></tr>
<tr><td colspan="5">**Коэффициент корреляции**</td></tr>
<tr><td colspan="5">$r(\overline{R}_X, \overline{R}_S) = 0{,}646$</td></tr>
</table>

Н.5 Анализ дисперсии

Этот пример кратко знакомит с методами анализа дисперсии ANOVA. Эти статистические методы используются для идентификации и определения значений отдельных *случайных эффектов* в измерениях, чтобы эти эффекты могли быть правильно приняты во внимание при оценивании неопределенности результата измерения. Хотя методы ANOVA применимы к широкому диапазону измерительных задач, например, к градуировке эталонов, таких как эталон вольта на диодах Зенера и эталоны массы, сертификации стандартных образцов, методы ANOVA сами по себе не могут идентифицировать систематические эффекты, которые могут присутствовать.

Существует множество различных моделей, используемых под общим названием ANOVA. В этом примере рассматривается, вследствие ее важности, специфическая модель, которая является уравновешенной гнездовой структурой. Численная иллюстрация этой модели включает в себя градуировку эталона напряжения на диодах Зенера; анализ должен соответствовать разнообразию практических измерительных ситуаций.

Методы ANOVA имеют особую важность при сертификации стандартных образцов (СО) веществ и материалов путем межлабораторных испытаний: эта тема подробно рассмотрена в Руководстве ИСО 35 [19] (см. Н.5.3.2 для краткого описания такой сертификации СО). Поскольку большая часть материала, содержащегося в Руководстве ИСО 35, имеет действительно широкое применение, к этой публикации можно обращаться за дополнительными подробностями относительно ANOVA, включая неуравновешенные гнездовые структуры. Также можно обратиться к [15] и [20].

Н.5.1 Измерительная задача

Предположим, что эталон вольта на диодах Зенера с номинальным значением 10 В калибруется с помощью стабильного источника опорного напряжения в течение двух недель. В каждый из J дней проводятся K независимых повторных наблюдений разности потенциалов V_S. Если V_{jk} обозначает k-ого наблюдения разности потенциалов V_S эталона ($k = 1, 2,..., K$) в j-й день ($j = 1, 2,..., J$), то наилучшей оценкой разности потенциалов эталона является среднее арифметическое всех наблюдений V_{jk} [см. уравнение (3) в 4.2.1]:

$$V_S = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} = \overline{V}. \qquad \text{(Н.24a)}$$

Экспериментальное стандартное отклонение среднего арифметического $s(\overline{V})$, которое является мерой неопределенности $\overline{V}$ в качестве оценки разности потенциалов эталона, получают из [см. уравнение (5) в 4.2.3]:

$$s^2(\overline{V}) = \frac{1}{JK(JK-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk} - \overline{V})^2 \qquad \text{(Н.24b)}$$

ПРИМЕЧАНИЕ - Повсюду в этом примере предполагается, что все поправки на систематические эффекты, вносимые в наблюдения, имеют незначительные неопределенности или их неопределенности такого характера, что могут быть включены в расчет в самом конце анализа. Поправка этой последней категории и та, которая сама по себе может быть введена в среднее арифметическое наблюдений в конце анализа, является разностью между значением, указанным в сертификате (в котором, как предполагается, указана и неопределенность), и рабочим значением опорного напряжения стабильного источника, по которому градуируется эталон напряжения на диодах Зенера. Таким образом, оценка разности потенциалов эталона, полученная статистическим способом из наблюдений, не обязательно является окончательным результатом измерения; и экспериментальное стандартное отклонение такой оценки не обязательно является суммарной стандартной неопределенностью окончательного результата.

Экспериментальное стандартное отклонение среднего арифметического $s(\overline{V})$, полученное из уравнения (Н.24b), является подходящей мерой неопределенности $\overline{V}$ только в том случае, если межсуточная изменчивость наблюдений такая же, как и изменчивость наблюдений, сделанных в один день. Если существует свидетельство того, что межсуточная вариация значительно больше, чем можно ожидать от вариации в течение одного дня, то использование этого выражения может привести к значительному преуменьшению неопределенности $\overline{V}$. Таким образом, возникают два вопроса: как следует определять, является ли межсуточная изменчивость (характеризующаяся межсуточной составляющей дисперсии) значительной по сравнению с вариацией в течение одного дня (характеризующаяся однодневной составляющей дисперсии) и, если это так, то как следует оценивать неопределенность этого среднего арифметического?

Таблица Н.9 - Сводка данных о калибровке эталона напряжения, полученных за $J = 10$ дней с ежедневным средним арифметическим $\overline{V}_j$ и экспериментальным стандартным отклонением $s(V_{jk})$, основанном на $K = 5$ независимых повторных наблюдениях

День, j Количество	1	2	3	4	5
$\overline{V}_j/V$	10,000 172	10,000 116	10,000 013	10,000 144	10,000 106
$s(V_{jk})/\mu V$	60	77	111	101	67
День, j Количество	6	7	8	9	10
$\overline{V}_j/V$	10,000 031	10,000 060	10,000 125	10,000 163	10,000 041
$s(V_{jk})/\mu V$	93	80	73	88	86
$\overline{V} = 10{,}000\ 097$ *В* $\quad s(\overline{V}_j) = 57$ мкВ $s_a^2 = Ks^2(\overline{V}_j) = 5(57\text{ мкВ})^2 = (128\text{ мкВ})^2 \quad s_b^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85\text{ мкВ})^2$					

Н.5.2 Числовой пример

Н.5.2.1 Данные, которые позволяют обратиться к вышеупомянутым вопросам, приведены в таблице Н.9, где:

$J = 10$ - число дней, в которые наблюдалась разность потенциалов;

$K = 5$ - число наблюдений разности потенциалов, проводимых каждый день;

$$\overline{V} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} \qquad (\text{Н.25a})$$

- среднее арифметическое $K = 5$ наблюдений разности потенциалов, сделанных в j -тый день (имеется J = 10 таких ежедневных средних арифметических);

$$\overline{V} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\overline{V}_j = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} \qquad (\text{Н.25b})$$

- среднее арифметическое ежедневных средних ($J = 10$) и, таким образом, общее среднее арифметическое наблюдений $JK = 50$;

$$s^2(V_{jk}) = \frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk} - \overline{V}_j)^2 \qquad (\text{Н.25c})$$

- экспериментальная дисперсия K = 5 наблюдений, сделанных в j -тый день (имеется J = 10 таких оценок дисперсии); и

$$s^2(\overline{V}_j) = \frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(\overline{V}_j - \overline{V})^2 \quad (\text{H.25d})$$

- экспериментальная дисперсия ежедневных $J = 10$ средних арифметических (имеется лишь одна такая оценка дисперсии).

Н.5.2.2 Сопоставимость изменчивости в течение одного дня и межсуточной изменчивости наблюдений можно исследовать, сравнив две независимые оценки σ_W^2 однодневной составляющей дисперсии (т.е. дисперсии наблюдений, сделанных в один и тот же день).

Первая оценка σ_W^2, обозначенная как s_a^2, получается из наблюдаемых отклонений ежедневных средних арифметических $\overline{V}_j$. Поскольку $\overline{V}_j$ есть среднее арифметическое K наблюдений, его оцененная дисперсия $s^2(\overline{V}_j)$ при допущении, что межсуточная составляющая дисперсии равна нулю, оценивается, как σ_W^2/K. Тогда из уравнения (Н.25d) следует:

$$s_a^2 = Ks^2(\overline{V}_j) = \frac{K}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(\overline{V}_j - \overline{V})^2 , \quad (\text{H.26a})$$

что является оценкой σ_W^2, имеющей $\nu_a = J - 1 = 9$ степеней свободы.

Вторая оценка σ_W^2, обозначенная как s_b^2, является суммарной оценкой дисперсии, полученной из $J = 10$ индивидуальных значений $s^2(V_{jk})$ с использованием уравнения из примечания к Н.3.6, где десять индивидуальных значений вычисляются из уравнения (Н.25c). Поскольку степени свободы каждого из этих значений суть $\nu_i = K - 1$, то получающееся в результате выражение для s_b^2, есть просто их среднее арифметическое. Таким образом:

$$s_b^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}s^2(V_{jk}) \quad (\text{H.26b})$$

$$= \frac{1}{J(K-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk} - \overline{V}_j)^2 ,$$

что является оценкой σ_W^2, имеющей $\nu_b = J(K - 1) = 40$ степеней свободы.

Оценки σ_W^2, данные уравнениями (Н.26a) и (Н.26b), являются s_a^2=(128 мкВ)^2 и s_b^2=(85 мкВ)^2 соответственно (см. таблицу Н.9). Поскольку оценка s_a^2 основывается на изменчивости ежедневных средних арифметических, в то время как оценка s_b^2 основывается на изменчивости ежедневных наблюдений, их разность показывает возможное присутствие эффекта, который изменяется день ото дня, но остается относительно постоянным, когда наблюдения проводятся в любой один из дней. Для проверки такой возможности используют F - тест и, таким образом, предполагают, что межсуточная составляющая дисперсии равна нулю.

Н.5.2.3 F-распределение является распределением вероятностей отношения $F(\nu_a, \nu_b) = s_a^2(\nu_a)/s_b^2(\nu_b)$ двух независимых оценок $s_a^2(\nu_a)$ и $s_b^2(\nu_b)$ дисперсии σ^2 нормально распределенной случайной переменной [15]. Параметры ν_a и ν_b являются соответствующими степенями свободы двух оценок и $0 \le F(\nu_a, \nu_b) < \infty$. Значения F внесены в таблицу для разных значений ν_a и ν_b и различных квантилей F - распределения. Значение $F(\nu_a, \nu_b) > F_{0,95}$ или $F(\nu_a, \nu_b) > F_{0,975}$ (критическое значение) обычно истолковывается как показывающее, что $s_a^2(\nu_a)$ больше $s_b^2(\nu_b)$ на статистически значимую величину и что вероятность значения F (такая же большая как наблюдаемая, если две оценки были оценками одной и той же дисперсии) меньше, чем 0,05 и 0,025 соответственно (можно выбрать также и другие критические значения, например, такое, как $F_{0,99}$).

Н.5.2.4 Использование F-теста для данного числового примера дает:

$$F(\nu_a, \nu_b) = \frac{s_a^2}{s_b^2} = \frac{Ks^2(\overline{V}_j)}{\overline{s^2(V_{jk})}} \qquad \text{(H.27)}$$

$$= \frac{5(57\mu V)^2}{(85\mu V)^2} = 2{,}25$$

при $\nu_a = J - 1 = 9$ степеней свободы в числителе и $\nu_b = J(K-1) = 40$ степеней свободы в знаменателе. Поскольку $F_{0,95}(9,40) = 2{,}12$ и $F_{0,975}(9,40) = 2{,}45$, то делается вывод, что существует статистически значимая межсуточная погрешность на уровне 5 процентов, но не на уровне 2,5 процентов.

Н.5.2.5 Если существование межсуточной погрешности отрицается, так как разница между s_a^2 и s_b^2 не рассматривается как статистически значимая (неразумное решение, так как оно может привести к недооценке неопределенности), оцененную дисперсию $s^2(\overline{V})$ для $\overline{V}$ следует рассчитать из уравнения (Н.24b). Это отношение эквивалентно суммированию оценок s_a^2 и s_b^2 (т.е. принятию средневзвешенного значения s_a^2 и s_b^2, каждое из которых взвешено по соответствующим степеням свободы ν_a и ν_b - см. Н.3.6, примечание) для получения наилучшей оценки дисперсии наблюдений; и делению этой оценки на число наблюдений JK для получения наилучшей оценки $s^2(\overline{V})$ дисперсии среднего арифметического наблюдений. Следуя этой процедуре, получают:

$$s^2(\overline{V}) = \frac{(J-1)s_a^2 + J(K-1)s_b^2}{JK(JK-1)} \qquad \text{(H.28a)}$$

$$= \frac{9(128\mu V)^2 + 40(85\mu V)^2}{(10)(5)(49)} = (13\ \text{мкВ})^2$$

или $s(\overline{V}) = 13$ мкВ (Н.28b)

с $s(\overline{V})$, имеющей $JK - 1 = 49$ степеней свободы.

Если предположить, что все поправки на систематические эффекты учтены и что все другие составляющие неопределенности незначительны, то результат калибровки можно указать, как $V_S = \overline{V} = 10{,}000\ 0097$ В (см. Таблицу Н.9) с суммарной стандартной неопределенностью $s(\overline{V}) = u_c = 13$ мкВ и с u_c, имеющей 49 степеней свободы.

ПРИМЕЧАНИЯ

1. На практике было бы вероятно, что существуют дополнительные составляющие неопределенности, которые были значительными и поэтому должны были бы быть объединены с составляющей неопределенности, полученной статистически из наблюдений (см. Н.5.1, Примечание).

2. Можно показать, что уравнение (Н.28а) для $s^2(\overline{V})$ эквивалентно уравнению (Н.24b), записав двойную сумму, обозначенную как S, в это уравнение:

$$S = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left[(V_{jk} - \overline{V}_j) + (\overline{V}_j - \overline{V})\right]^2$$
$$= (J-1)s_a^2 + J(K-1)s_b^2.$$

Н.5.2.6 Если существование межсуточной погрешности принимается (разумное решение, так как оно позволяет избежать возможной недооценки неопределенности) и предполагается, что она случайна, то дисперсия $s^2(\overline{V}_j)$, рассчитанная из $J = 10$ ежедневных средних значений в соответствии с уравнением (Н.25d), оценивает не σ_W^2 / K, как указано в п.5.2.2, а $\sigma_W^2 / K + \sigma_B^2$, где σ_B^2 - межсуточная случайная составляющая дисперсии. Это подразумевает, что

$$s^2(\overline{V}_j) = s_W^2 / K + s_B^2, \qquad \text{(H.29)}$$

где s_W^2 оценивает σ_W^2, а s_B^2 оценивает σ_B^2. Поскольку $\overline{s^2(V_{jk})}$, рассчитанное из уравнения (Н.26b), зависит только от изменчивости наблюдений в течение одного дня, можно принять $s_W^2 = \overline{s^2(V_{jk})}$. Таким образом, отношение $Ks^2(\overline{V}_j) / \overline{s^2(V_{jk})}$, используемое для F-теста в Н.5.2.4, становится:

$$F = \frac{Ks^2(\overline{V}_j)}{\overline{s^2(V_{jk})}} = \frac{s_W^2 + Ks_B^2}{s_W^2} \qquad \text{(H.30)}$$

$$= \frac{5(57\mu V)^2}{(85\mu V)^2} = 2{,}25,$$

которое затем ведет к:

$$s_B^2 = \frac{Ks^2(\overline{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}}{K} \qquad \text{(H.31a)}$$

$$= (43\ \text{мкВ})^2 \quad \text{или } s_B = 43\ \text{мкВ},$$

$$s_W^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85\mu V)^2$$

$$\text{или} \quad s_W = 85\ \text{мкВ}. \qquad \text{(H.31b)}$$

Оцененная дисперсия $\overline{V}$ получается из $s^2(\overline{V}_j)$, уравнение (H.25d), так как $s^2(\overline{V}_j)$ должным образом отражает как однодневную, так и межсуточную случайные составляющие дисперсии [см. уравнение (H.29)]. Таким образом,

$$s^2(\overline{V}) = s^2(\overline{V}_j) / J \qquad \text{(H.32)}$$

$$= (57\ \text{мкВ})^2/10 \text{ или } s(\overline{V}) = 85\ \text{мкВ}$$

при $s(\overline{V})$, имеющем $J - 1 = 9$ степеней свободы.

Степени свободы s_W^2 (и, таким образом, s_W) составляют $J(K - 1) = 40$ [см. уравнение (H.26b)]. Степени свободы s_B^2 (и, таким образом, s_B) являются эффективными степенями свободы разности $s_B^2 = s^2(\overline{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}/K$ [уравнение (H.31a)], но их оценивание проблематично.

H.5.2.7 Наилучшая оценка разности потенциалов эталона напряжения составляет тогда $V_S = \overline{V} = 10{,}000\ 097$ В при $s(\overline{V}) = u_c = 18$ мкВ, как дано в уравнении (H.32). Это значение u_c и его 9 степеней свободы должны сравниваться с $u_c = 13$ мкВ и его 49 степенями свободы - результатом, полученным в H.5.2.5 [уравнение (H.28b)], когда существование межсуточного эффекта отрицалось.

При реальном измерении очевидный межсуточный эффект должен исследоваться дальше, если возможно, для того, чтобы определить его причину и то, существует ли систематический эффект, который отвергает использование методов ANOVA. Как было указано в начале этого примера, методы ANOVA предназначены для идентификации и оценивания составляющих неопределенности, возникающих из-за случайных эффектов; они не могут предоставить информацию о составляющих, возникающих из-за систематических эффектов.

H.5.3 Роль ANOVA в измерении

H.5.3.1 Этот пример с эталоном напряжения иллюстрирует то, что обычно называют уравновешенной одноэтапной гнездовой структурой. Эта гнездовая структура одноэтапна, потому что существует один уровень "гнездования" наблюдений с одним фактором - день, в который проводятся наблюдения, меняется при измерении. Она уравновешена, потому что каждый день проводится одинаковое число наблюдений. Анализ, представленный в примере, можно использовать для того, чтобы определить, существует ли "эффект оператора", "инструментальный эффект", "лабораторный эффект", "эффект образца" или даже "методический эффект" в конкретном измерении. Таким образом, в этом примере можно представить себе замену наблюдений, сделанных в разные дни J, на наблюдения, сделанные в один и тот же день, но J разными операторами; межсуточная составляющая дисперсии становится тогда составляющей дисперсии, связанной с разными операторами.

H.5.3.2 Как указано в H.5, методы ANOVA широко используются при сертификации стандартных образцов (СО) путем межлабораторных испытаний. Такая сертификация обычно подразумевает участие ряда независимых, одинаково компетентных лабораторий, измеряющих образцы вещества на свойство, по которому это вещество должно быть сертифицировано. Обычно предполагается, что расхождения между отдельными результатами как внутри одной лаборатории, так и между лабораториями, являются статистическими по природе, независимо от причин. Каждое лабораторное среднее значение считается несмещенной оценкой свойства вещества, и обычно невзвешенное среднее лабораторных средних значений предполагается наилучшей оценкой этого свойства.

Сертификация СО может включать *I* разных лабораторий, каждая из которых измеряет требуемое свойство *J* разных образцов вещества, причем каждое измерение образца состоит из *K* независимых повторных наблюдений. Таким образом, общее число наблюдений равно *IJK*, а общее число образцов равно *IJ*. Это пример уравновешенной двухэтапной гнездовой структуры, аналогичной одноэтапному примеру для эталона напряжения, описанному выше. В этом случае существуют два уровня "гнездования" наблюдений с двумя различными факторами - образец и лаборатория, которые изменяются при измерении. Структура является уравновешенной, так как каждый образец наблюдается одинаковое число раз (*K*) в каждой лаборатории, и каждая лаборатория измеряет одинаковое число образцов (*J*). Далее, по аналогии с примером эталона напряжения, в случае с СО целью анализа данных является исследование возможного существования межобразцовых и межлабораторных эффектов и определение соответствующей неопределенности, которую можно приписать наилучшей оценке значения свойства, подлежащего сертификации. В соответствии с предыдущим параграфом предполагается, что эта оценка является средним из *J* лабораторных средних значений, которая также является средним значением *IJK* наблюдений.

Н.5.3.3 В 3.4.2 указана важность изменения входных величин, от которых зависит результат измерения, так как его неопределенность зависит от данных наблюдений, оцениваемых статистически. Гнездовые структуры и анализ результатов методами ANOVA можно с успехом использовать во многих измерительных ситуациях, встречающихся на практике.

Тем не менее, как указано в 3.4.1, изменение всех входных величин редко является возможным из-за ограниченности во времени и ресурсах; в лучшем случае, в большинстве измерительных ситуаций на практике можно оценить только несколько составляющих неопределенности, используя методы ANOVA. Как указано в п.4.3.1, многие составляющие должны оцениваться с помощью научного суждения, используя всю имеющуюся информацию о возможной изменчивости рассматриваемых входных величин; во многих случаях такая составляющая неопределенности, как та, которая возникает из-за межобразцовых, межлабораторных, межприборных или межоператорных эффектов, не может быть оценена путем статистического анализа ряда наблюдений, а должна оцениваться из совокупности имеющейся информации.

H.6 Измерения по эталонной шкале: твердость

Твердость является примером физического свойства, которое нельзя количественно определить без ссылки на метод измерения; она не имеет единицы, которая независима от такого метода. Величина "твердость" непохожа на классические измеряемые величины тем, что она не может войти в алгебраические уравнения для определения других измеряемых величин (хотя она иногда используется в эмпирических уравнениях, которые относят "твердость" к другому свойству для некоторой категории веществ). Ее величина определяется путем условного измерения, которое имеет линейную размерность отпечатка на плитке интересующего вещества, или на *образцовой плитке*. Измерение проводится в соответствии с изданным стандартом, который включает описание "наконечника", конструкцию машины, с помощью которой вдавливается наконечник, и способ, каким управляется машина. Существует более одного изданного стандарта, поэтому существует более одной шкалы твердости.

Указываемая твердость является функцией (зависящей от шкалы) линейного размера, который измеряют. В примере, данном в этом подразделе, она является линейной функцией от среднего арифметического или среднего значения глубин пяти повторных отпечатков, но для некоторых других шкал функция нелинейна.

Реализации эталонной машины считаются национальными эталонами (не существует международной эталонной реализации); сличение между конкретной машиной и *национальной эталонной машиной* производится с помощью *образца сравнения твердости.*

H.6.1 Измерительная задача

В этом примере твердость образца твердости материала определяется по шкале твердости "Роквелл С", используя установку, которая была откалиброванa по национальной эталонной установке. Деление шкалы твердости Роквелл С составляет 0,002 мм, причем твердость на этой шкале определяется, как 100×(0,002 мм) минус среднее арифметическое глубин пяти отпечатков, измеренных в мм. Значение этой величины, деленное на единицу шкалы Роквелл С 0,002 мм, называется "показателем твердости HRC". В этом примере величина называется просто "твердость" с обозначением $h_{\text{Роквелл C}}$, и численное значение твердости, выраженное в единицах длины шкалы Роквелл С, называется " показателем твердости" с обозначением $H_{\text{Роквелл C}}$.

H.6.2 Математическая модель

К среднему арифметическому глубин оттисков, сделанных в образце твердости установкой для ее определения или *калибровочной установкой* необходимо добавить поправки для определения среднего арифметического глубин оттисков, которые были бы сделаны в том же самом образце национальной эталонной установкой. Таким образом,

$$h_{\text{Роквелл C}} = f(\bar{d}, \Delta_c, \Delta_b, \Delta_S)$$
$$= 100(0{,}002\ \text{мм}) - \bar{d} - \Delta_c - \Delta_b - \Delta_S, \quad \text{(H.33a)}$$

$$H_{\text{Роквелл C}} = h_{\text{Роквелл C}}/(0{,}002\ \text{мм}), \quad \text{(H.33b)}$$

где $\bar{d}$ - среднее арифметическое глубин пяти оттисков, сделанных калибровочной установкой в образце твердости;

Δ_c - поправка, полученная из сличения калибровочной установки с национальной эталонной установкой, используя образец эталона сравнения, равная среднему арифметическому глубин $5m$ оттисков, сделанных национальной эталонной установкой в этом образце, минус среднее арифметическое глубин $5n$ оттисков, сделанных в том же самом образце калибровочной установкой;

Δ_b - разница в твердости (выраженная как разность средней глубины оттисков) между двумя частями образца эталона сравнения, использованных, соответственно, для оттисков двумя установками, предполагаемая равной нулю; и

Δ_S - погрешность, обусловленная недостаточной воспроизводимостью национальной эталонной установки и неполным количественным определением твердости. Хотя Δ_S должна предположительно быть равной нулю, она имеет стандартную неопределенность $u(\Delta_S)$, связанную с ней.

Поскольку частные производные $\partial f/\partial \bar{d}$, $\partial f/\partial \Delta_c$, $\partial f/\partial \Delta_b$ и $\partial f/\partial \Delta_S$ функции уравнения (H.33a) все равны -1, суммарная стандартная неопределенность $u_c^2(h)$ твердости образца, измеренная калибровочной установкой, просто дается формулой:

$$u_c^2(h) = u^2(\bar{d}) + u^2(\Delta_c) + u^2(\Delta_b) + u^2(\Delta_S), \qquad (H.34)$$

где для простоты записи $h \equiv h_{\text{Роквелл C}}$.

H.6.3 Составляющие дисперсии

H.6.3.1 Неопределенность средней глубины оттисков $\bar{d}$ образца твердости, $u(\bar{d})$

Неопределенность повторных наблюдений. Строгое повторение наблюдения невозможно, так как новый оттиск нельзя сделать на месте предыдущего. Поскольку каждый оттиск должен быть сделан в новом месте, любое изменение в результатах включает эффект изменения твердости между различными местами. Таким образом, $u(\bar{d})$, стандартная неопределенность среднего арифметического глубин пяти оттисков в образце твердости, сделанных калибровочной установкой, берется, как $s_p(d_k)/\sqrt{5}$, где $s_p(d_k)$ есть суммарное экспериментальное стандартное отклонение глубин оттисков, определенных "повторными" измерениями на образце, о котором известно, что он имеет весьма однородную твердость (см. 4.2.4).

Неопределенность показания. Хотя поправка к $\bar{d}$, обусловленная дисплеем калибровочной установки, равна нулю, существует неопределенность в $\bar{d}$, обусловленная неопределенностью показания глубины из-за разрешения δ дисплея, которая дана формулой $u^2(\delta) = \delta^2/12$ (см. F.2.2.1). Оцененная дисперсия $\bar{d}$, таким образом, равна:

$$u^2(\bar{d}) = s^2(d_k)/5 + \delta^2/12. \qquad (H.35)$$

H.6.3.2 Неопределенность поправки на расхождение между двумя установками, $u(\Delta_c)$

Как указано в H.6.2, Δ_c является поправкой на расхождение между национальной эталонной и калибровочной установками. Эта поправка может быть выражена, как $\Delta_c = Z'_S - Z'$, где $Z'_S = (\sum_{i=1}^{m} \bar{Z}_{s,i})/m$ есть средняя глубина $5m$ оттисков, сделанных национальной эталонной установкой в образце эталона сравнения; и $Z' = \sum_{i=1}^{n} \bar{Z}_i/n$ - средняя глубина $5n$ оттисков, сделанных в том же самом образце калибровочной установкой. Таким образом, предполагая, что для сличения неопределенность, обусловленная разрешением дисплея каждой установки, пренебрежимо мала, оцененная дисперсия Δ_c составляет:

$$u^2(\Delta_c) = \frac{s_{\text{ср}}^2(\bar{z}_S)}{m} + \frac{s_{\text{ср}}^2(\bar{z})}{n}, \qquad (H.36)$$

где:

$s_{cp}^2(\overline{Z}_s) = \left[\sum_{i=1}^{m} s^2(\overline{Z}_{s,j})\right] / m$ - среднее арифметическое экспериментальных дисперсий средних значений каждой из m рядов оттисков $Z_{S,ik}$, сделанных эталонной установкой;

$s_{cp}^2(\overline{Z}) = \left[\sum_{i=1}^{n} s^2(\overline{Z}_i)\right] / n$ - среднее арифметическое экспериментальных дисперсий средних значений каждой из n рядов оттисков $Z_{i,k}$, сделанных калибровочной установкой.

Примечание - Дисперсии $s_{cp}^2(\overline{Z}_s)$ и $s_{cp}^2(\overline{Z})$ являются суммарными оценками дисперсии - см. обсуждение уравнения (Н.26.b) в Н.5.2.2.

Н.6.3.3 Неопределенность поправки, обусловленной изменениями твердости образца эталона сравнения, $u(\Delta_b)$

Международная рекомендация МОЗМ R12 *Поверка и калибровка эталонных образцов твердости по Роквеллу С* требует, чтобы максимальная и минимальная глубины оттисков, полученных из пяти измерений на образце эталона сравнения, не должны отличаться больше, чем на долю x средней глубины оттиска, где x - функция уровня твердости. Пусть тогда максимальное расхождение в глубинах оттиска на всем образце будет xz', где z' определено в Н.6.3.2 с $n = 5$. Пусть также максимальное расхождение будет описано треугольным распределением вероятностей вокруг значения $xz'/2$ (при похожем предположении, что значения, близкие к центральному значению, бо-

Таблица Н.10 - Сводные данные для определения твердости образца по шкале Роквелла С

Источник неопределенности	Значение
Средняя глубина $\overline{d}$ пяти оттисков, сделанных калибровочной установкой в образце: 0,072 мм	36,0 единиц по шкале Роквелла
Указанный показатель твердости образца из 5 оттисков: $H_{\text{Роквелл C}} = h_{\text{Роквелл C}}/(0{,}002\ \text{мм}) =$ $[100(0{,}002\ \text{мм}) - 0{,}072\ \text{мм}]/(0{,}002\ \text{мм})$ (см. Н.6.1)	64,0 HRC
Суммарное экспериментальное стандартное отклонение $s_p(d_k)$ глубин оттисков, сделанных калибровочной установкой в образце, имеющем однородную твердость	0,45 единиц по шкале Роквелла
Разрешение δ дисплея калибровочной установки	0,1 единиц по шкале Роквелла
$s_{cp}(\overline{z}_S)$, квадратный корень из среднего арифметического экспериментальных дисперсий средних значений m рядов оттисков, сделанных национальной эталонной установкой в образце эталона сравнения	0,10 единиц по шкале Роквелла, $m = 6$
$s_{cp}(\overline{z})$,квадратный корень из среднего арифметического экспериментальных дисперсий средних значений n рядов оттисков, сделанных калибровочной установкой в образце эталона сравнения	0,11 единиц по шкале Роквелла, $n = 6$
Допустимое изменение x глубины проникновения в образец эталона сравнения	$1{,}5 \times 10^{-2}$
Стандартная неопределенность $u(\Delta_S)$ национальной эталонной установки и определения твердости	0,5 единиц по шкале Роквелла

лее вероятны, чем экстремальные значения - см. 4.3.9). Тогда, если в уравнении (9b) в 4.3.9 $a = xz'/2$, то оцененная дисперсия поправки к средней глубине оттисков, обусловленная расхождениями в твердости и представленная, соответственно, для эталонной и калибровочной установок, составляет:

$$u^2(\Delta_b) = (xz')^2/24. \qquad (Н.37)$$

Как указано в Н.6.2, предполагается, что наилучшая оценка поправки самого Δ_b равна нулю.

Н.6.3.4 Неопределенность национальной эталонной установки и определения твердости, $u(\Delta_S)$

Неопределенность национальной эталонной установки вместе с неопределенностью, обусловленной неполным количественным определением твердости, приводится в отчете как оценка стандартного отклонения $u(\Delta_S)$ (величина с размерностью *длины*).

Н.6.4 Суммарная стандартная неопределенность, $u_c(h)$

Собирание отдельных членов, рассмотренных в пунктах с Н.6.3.1 по Н.6.3.4, и их подстановка в уравнение (Н.34) дает оценку дисперсии измерения твердости

$$u_c^2(h) = \frac{s^2(d_k)}{5} + \frac{\delta^2}{12} + \frac{s_{\text{ср}}^2(\bar{z}_S)}{m} + \frac{s_{\text{ср}}^2(\bar{z})}{n} + \frac{(xz')^2}{24} + u^2(\Delta_S) \qquad (Н.38)$$

и суммарной стандартной неопределенности - $u_c(h)$.

Н.6.5 Числовой пример

Данные для этого примера приведены в таблице Н.10.

В качестве шкалы используется шкала Роквелла С, обозначаемая HRC. Единица шкалы Роквелла составляет 0,002 мм, и, таким образом, в таблице Н.10 и далее понимается, что (например) "36,0 единиц по шкале Роквелла" означает 36,0×(0,002 мм) = 0,072 мм, и это является просто удобным способом для выражения данных и результатов.

Если значения для соответствующих величин, приведенные в таблице Н.10, подставить в уравнение (Н.38), то получим следующие два выражения:

$$u_c^2(h) = \left[\frac{0{,}45^2}{5} + \frac{0{,}1^2}{12} + \frac{0{,}10^2}{6} + \frac{0{,}11^2}{6} + \frac{(0{,}015\times 36{,}0)^2}{24} + 0{,}5^2\right] \text{(единиц по шкале Роквелла)}^2$$
$$= 0{,}307 \text{ (единиц по шкале Роквелла)}^2,$$

$$u_c(h) = 0{,}55 \text{ единиц по шкале Роквелла} = 0{,}0011\text{мм},$$

где в целях расчета неопределенности будет допустимо принять $z' = \bar{d} = 36{,}0$ единиц по шкале Роквелла.

Таким образом, если предположить, что Δ_c=0, то твердость образца составляет:

> $h_{\text{Роквелл С}}$ = 64,0 единиц по шкале Роквелла или 0,1280 мм при суммарной стандартной неопределенности u_c = 0,55 единиц по шкале Роквелла или 0,0011 мм.

Показатель твердости образца составляет $h_{\text{Роквелл С}}$/(0,002 мм) = (1280 мм)/(0,002 мм) или:

> $H_{\text{Роквелл С}}$ = 64,0 HRC при суммарной стандартной неопределенности u_c = 0,55 HRC.

Кроме составляющей неопределенности, обусловленной национальной эталонной установкой и определением твердости $u(\Delta_S)$ = 0,5 единиц по шкале Роквелла, значительными составляющими неопределенности являются воспроизводимость установки $s_p(d_k)/\sqrt{5}$ = 0,20 единиц по шкале Роквелла и изменение твердости образца эталона сравнения, которое составляет $(xz')^2/24$ = 0,11 единиц по шкале Роквелла. Число эффективных степеней свободы u_c можно оценить, используя формулу Велча - Саттерсвейта так, как показано в H.1.6.

Приложение J

Словарь основных символов

a — Половина ширины прямоугольного распределения возможных значений входной величины X_i: $a = (a_+ - a_-)/2$

a_+ — Верхняя граница или верхний предел входной величины X_i

a_- — Нижняя граница или нижний предел входной величины X_i

b_+ — Верхняя граница или верхний предел отклонения входной величины X_i от ее оценки x_i: $b_+ = a_+ - x_i$

b_- — Нижняя граница или нижний предел отклонения входной величины X_i от ее оценки x_i: $b_- = x_i - a_-$

c_i — Частная производная или коэффициент чувствительности: $c_i \equiv \partial f / \partial x_i$

f — Функциональная зависимость между измеряемой величиной Y и входными величинами X_i, от которых зависит Y, и между оценкой выходной величины y и оценками входных величин x_i

$\partial f / \partial x_i$ — Частная производная по входной величине X_i функциональной зависимости между измеряемой величиной Y и входными величинами X_i, от которых зависит Y, выраженная в оценках x_i для X_i: $\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial X_i \big|_{x_1, x_2, \ldots, x_N}$

k — Коэффициент охвата, применяемый для вычисления расширенной неопределенности $U = ku_c(y)$ оценки выходной величины y из ее суммарной стандартной неопределенности $u_c(y)$, где U определяет интервал $Y = y \pm U$, имеющий высокий уровень доверия

k_p — Коэффициент охвата, применяемый для вычисления расширенной неопределенности $U_p = k_p u_c(y)$ оценки выходной величины y по ее суммарной стандартной неопределенности $u_c(y)$, где U_p определяет интервал $Y = y \pm U_p$, имеющий высокий заданный уровень доверия

n — Число повторных наблюдений

N — Число входных величин X_i, от которых зависит измеряемая величина Y

p — Вероятность; уровень доверия: $0 \le p \le 1$

q — Случайно изменяющаяся величина, описываемая распределением вероятностей

$\bar{q}$ — Среднее арифметическое или среднее значение n независимых повторных наблюдений q_k случайно изменяющейся величины q; оценка математического ожидания или среднего μ_q распределения вероятностей q

q_k — k-ое независимое повторное наблюдение случайно изменяющейся величины q

$r(x_i, x_j)$ — Оцененный коэффициент корреляции, связанный с оценками x_i и x_j входных величин X_i и X_j: $r(x_i, x_j) = u(x_i, x_j) / u(x_i)u(x_j)$

$r(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ — Оцененный коэффициент корреляции между средними значениями входных величин $\overline{X}_i$ и $\overline{X}_j$, определенными по n независимым парам наблюдений $X_{i,k}$ и $X_{j,k}$ величин X_i и X_j: $r(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)/s(\overline{X}_i)s(\overline{X}_j)$

$r(y_i, y_j)$ Оцененный коэффициент корреляции, связанный с оценками y_i и y_j выходных величин, когда в рамках одного измерения определяются две или более измеряемых или выходных величин

s_p^2 Суммарная или объединенная оценка дисперсии

s_p Суммарное экспериментальное стандартное отклонение, равное положительному квадратному корню из s_p^2

$s^2(\overline{q})$ Экспериментальная дисперсия среднего значения $\overline{q}$; оценка дисперсии σ^2/n среднего значения $\overline{q}$: $s^2(\overline{q}) = s^2(q_k)/n$; оцененная дисперсия, полученная из оценивания по типу А

$s(\overline{q})$ Экспериментальное стандартное отклонение среднего значения $\overline{q}$, равное положительному квадратному корню из $s^2(\overline{q})$; $s(\overline{q})$ - смещенная оценка $\sigma(\overline{q})$ (см. С.2.21, Примечание); стандартная неопределенность, оцененная по типу А

$s^2(q_k)$ Экспериментальная дисперсия, полученная по n независимым повторным наблюдениям q_k величины q; оценка дисперсии σ^2 распределения вероятностей величины q

$s(q_k)$ Экспериментальное стандартное отклонение, равное положительному квадратному корню из $s^2(q_k)$; $s(q_k)$ - смещенная оценка стандартного отклонения σ распределения вероятностей величины q

$s^2(\overline{X}_i)$ Экспериментальная дисперсия среднего значения $\overline{X}_i$ входной величины, полученная по n независимым повторным наблюдениям $X_{i,k}$ величины X_i; оцененная дисперсия, полученная из оценивания по типу А

$s(\overline{X}_i)$ Экспериментальное стандартное отклонение среднего значения $\overline{X}_i$ входной величины, равное положительному квадратному корню из $s^2(\overline{X}_i)$; стандартная неопределенность, оцененная по типу А

$s(\overline{q}, \overline{r})$ Оценка ковариации средних значений $\overline{q}$ и $\overline{r}$, оценивающих математические ожидания μ_r и μ_q двух случайно изменяющихся величин q и r, полученная по n независимым парам одновременных повторных наблюдений r_k и q_k величин r и q; оцененная ковариация, полученная из оценивания по типу А

$s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ Оценка ковариации средних значений входных величин $\overline{X}_i$ и $\overline{X}_j$, полученная по n независимым парам одновременных повторных наблюдений $X_{i,k}$ и $X_{j,k}$ величин X_i и X_j; оцененная ковариация, полученная из оценивания по типу А

$t_p(\nu)$ t-фактор из t-распределения при числе степеней свободы ν, отвечающей заданной вероятности p

$t_p(\nu_{eff})$ t-фактор из t-распределения при числе степеней свободы ν_{eff}, отвечающей заданной вероятности p и используемый для вычисления расширенной неопределенности U_p

$u^2(x_i)$ Оцененная дисперсия, связанная с оценкой x_i входной величины X_i

Примечание - Когда x_i определяют из среднего арифметического или среднего n независимых повторных наблюдений, $u^2(x_i) = s^2(\overline{X}_i)$ является оцененной дисперсией, полученной из оценивания по типу А

$u(x_i)$ Стандартная неопределенность оценки x_i входной величины X_i, равная положительному квадратному корню из $u^2(x_i)$

Примечание - Когда x_i определяют из среднего арифметического или среднего n независимых повторных наблюдений, то $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ - стандартная неопределенность, полученная из оценивания по типу А

$u(x_i, x_j)$ Оцененная ковариация, связанная с двумя оценками x_i и x_j входных величин X_i и X_j

Примечание - Когда x_i и x_j определяют из n независимых пар одновременных повторных наблюдений, то $u(x_i , x_j) = s^2(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ является оцененной ковариацией, полученной из оценивания по типу А

$u_c^2(y)$ Суммарная дисперсия, связанная с оценкой y выходной величины

$u_c(y)$ Суммарная стандартная неопределенность оценки y выходной величины, равная положительному квадратному корню из $u_c^2(y)$

$u_{cA}(y)$ Суммарная стандартная неопределенность оценки y выходной величины, определенная по стандартным неопределенностям и оцененным только по типу А ковариациям

$u_{cB}(y)$ Суммарная стандартная неопределенность оценки y выходной величины, определенная по стандартным неопределенностям и оцененным только по типу В ковариациям

$u_c(y_i)$ Суммарная стандартная неопределенность оценки y_i выходной величины, когда две или более измеряемых или выходных величин определяются в ходе одного и того же измерения

$u_i^2(y)$ Составляющая суммарной дисперсии $u_c^2(y)$, связанная с оценкой y выходной величины и обусловленная наличием оцененной дисперсии $u^2(x_i)$ оценки входной величины x_i: $u_i^2(y) \equiv [c_i\, u(x_i)]^2$

$u_i(y)$ Составляющая суммарной стандартной неопределенности $u_c(y)$ оценки y выходной величины, обусловленная стандартной неопределенностью оценки входной величины x_i: $u_i(y) \equiv |c_i|\, u(x_i)$

$u(y_i, y_j)$ Оцененная ковариация, связанная с оценками y_i и y_j выходных величин, определенных в ходе одного и того же измерения

$u(x_i)/|x_i|$ Относительная стандартная неопределенность оценки x_i входной величины

$u_c(y)/|y|$ Относительная суммарная стандартная неопределенность оценки y выходной величины

$[u(x_i)/x_i]^2$ Оцененная относительная дисперсия, связанная с оценкой x_i входной величины

$[u_c(y)/y]^2$ Относительная суммарная дисперсия, связанная с оценкой y выходной величины

$\dfrac{u(x_i, x_j)}{|x_i x_j|}$ Оцененная относительная ковариация, связанная с оценками x_i и x_j входных величин

U Расширенная неопределенность оценки y выходной величины, определяющая интервал $Y = y \pm U$, имеющий высокий уровень доверия, равная суммарной стандартной неопределенности $u_c(y)$ величины y, умноженной на коэффициент охвата k: $U = ku_c(y)$

U_p Расширенная неопределенность оценки y выходной величины, определяющая интервал $Y = y \pm U_p$, имеющий высокий заданный уровень доверия p, равная суммарной стандартной неопределенности $u_c(y)$ величины y, умноженной на коэффициент охвата k_p: $U_p = k_p u_c(y)$

x_i Оценка входной величины X_i

Примечание - Когда x_i определяют из среднего арифметического или среднего n независимых повторных наблюдений, то $x_i = \overline{X}_i$

X_i i-ая входная величина, от которой зависит измеряемая величина Y

Примечание - X_i может быть как физической величиной, так и случайной переменной (см. 4.1.1, Примечание 1)

$\overline{X}_i$ Оценка значения входной величины X_i, равная среднему арифметическому или среднему n независимых повторных наблюдений $X_{i,\ k}$ величины X_i

$X_{i,\,k}$ k-ое независимое повторное наблюдение величины X_i

y Оценка измеряемой величины Y; результат измерения; оценка выходной величины

y_i Оценка измеряемой величины Y_i, когда две или более измеряемых величин определяются в ходе одного и того же измерения

Y Измеряемая величина

$\dfrac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}$ Оцененная относительная неопределенность стандартной неопределенности $u(x_i)$ оценки x_i входной величины

μ_q Математическое ожидание или среднее распределения вероятностей случайно изменяющейся величины q

ν Число степеней свободы (в общем случае)

ν_i Число степеней свободы или число эффективных степеней свободы стандартной неопределенности $u(x_i)$ оценки x_i входной величины

ν_{eff} Число эффективных степеней свободы $u_c(y)$, используемых, чтобы получить $t_p(\nu_{eff})$ для вычисления расширенной неопределенности U_p

ν_{effA} Число эффективных степеней свободы суммарной стандартной неопределенности, определенной по стандартным неопределенностям, оцененным только по типу А

ν_{effB} Число эффективных степеней свободы суммарной стандартной неопределенности, определенной по стандартным неопределенностям, оцененным только по типу В

σ^2 Дисперсия распределения вероятностей (например) случайно изменяющейся величины q, оцененная с помощью $s^2(q_k)$

σ Стандартное отклонение распределения вероятностей, равное положительному квадратному корню из σ^2; $s(q_k)$ - смещенная оценка σ

$\sigma^2(\overline{q})$ Дисперсия $\overline{q}$, равная σ^2/n, оцененная с помощью $s^2(\overline{q}) = s^2(q_k)/n$

$\sigma(\overline{q})$ Стандартное отклонение $\overline{q}$, равное положительному квадратному корню из $\sigma^2(\overline{q})$; $s(\overline{q})$ - смещенная оценка $\sigma(\overline{q})$

$\sigma^2[s(\overline{q})]$ Дисперсия экспериментального стандартного отклонения $s(\overline{q})$ величины $\overline{q}$

$\sigma[s(\overline{q})]$ Стандартное отклонение экспериментального стандартного отклонения $s(\overline{q})$ величины $\overline{q}$, равное положительному квадратному корню из $\sigma^2[s(\overline{q})]$

Приложение К

Библиография

[1] CIPM (1980), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **48**, C1-C30 (in French); BIPM (1980), Rapport BIPM-80/3, *Report on the BIMP enquiry on error statements,* Bur. Intl. Poids et Mesures (Sèvres, France) (in English).

[2] Kaarls, R. (1981), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49**, A1-A12 (in French); Giacomo, P. (1981), *Metrologia* **17**, 73-74 (in English).

ПРИМЕЧАНИЕ - Английский перевод Рекомендации INC-1 (1980), приведенный во Введении к данному *Руководству* (см. 0.7), представляет собой окончательный вариант Рекомендации и взят из внутреннего отчета МБМВ. Он не противоречит авторизованному французскому тексту, представленному в *BIMP Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49,** и воспроизведен в A.1 приложения A настоящего *Руководства.* Английский перевод Рекомендации INC-1 (1980), приведенный в журнале *Metrologia* **17,** представляет собой проект и слегка отличается от перевода, приведенного во внутреннем отчете МБМВ и, следовательно, в 0.7.

[3] CIPM (1981), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49**, 8-9, 26 (in French); Giacomo, P. (1982), *Metrologia* **18**, 43-44 (in English).

[4] CIPM (1986), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **54**, 14, 35 (in French); Giacomo, P. (1987), *Metrologia* **24**, 49-50 (in English).

[5] ISO 5725: 1986, *Точность методов испытаний - Определение сходимости и воспроизводимости образцового метода испытаний по результатам межлабораторных сличений,* Международная организация по стандартизации (Женева, Швейцария).

ПРИМЕЧАНИЕ - Данный стандарт в настоящее время пересматривается. Исправленное издание имеет новое название "Точность (достоверность и прецизионность) методов и результатов измерений" и состоит из 6 частей.

[6] *International vocabulary of basic and general terms in metrology, Международный словарь основных и общих терминов в метрологии,* второе издание, 1993, Международная организация по стандартизации (Женева, Швейцария).

Аббревиатура заглавия этого словаря - VIM.

ПРИМЕЧАНИЯ

1 Определения терминов, приведенных в приложении B, взяты из пересмотренного английского текста словаря VIM в его окончательной форме перед публикацией.

2 Вторая редакция VIM опубликована Международной организацией по стандартизации (ИСО) от имени следующих семи организаций, участвующих в работе Технической Консультативной Группы 4 ИСО (TAG 4), группы, содействовавшей созданию VIM:

Международного бюро мер и весов (МБМВ), Международной электротехнической комиссии (МЭК), Международной федерации клинической химии (IFCC), ИСО, Международного союза чистой и прикладной химии (IUPAC), Международного союза чистой и прикладной физики (IUPAP) и Международной организации по законодательной метрологии (МОЗМ).

3 Первая редакция VIM опубликована ИСО в 1984 г. от имени МБМВ, МЭК, ИСО и МОЗМ.

[7] ISO 3534-1:1993, *Статистика - Словарь и обозначения - Часть 1: Вероятность и общие статистические термины*, Международная организация по стандартизации (Женева, Швейцария).

[8] Fuller, W. A. (1987), *Measurement error models* (*Модели погрешностей измерения*), John Wiley (New York, N.Y.).

[9] Allan, D. W. (1987), *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **IM-36**, 646-654.

[10] Dietrich, C.F. (1991), *Uncertainty, calibration and probability* (Неопределенность, калибровка и вероятность), вторая редакция, Adam-Hilger (Bristol).

[11] Muller, J.W. (1979), *Nucl. Instrum. Meth.* **163**, 241-251.

[12] Muller, J.W. (1984), in *Precision measurement and fundamental constants II* (*Прецизионные измерения и фундаментальные константы II*), Taylor, B. N., and Phillips, W. D., eds., Natl. Bur. Stand. (U.S.) Spec. Publ. 617, US GPO (Washington, D.C.), 375-381.

[13] Jeffreys, H. (1983), *Theory of probability* (*Теория вероятностей*), третья редакция, Oxford University Press (Oxford).

[14] Press, S. J. (1989), *Bayesian statistics: principles, models, and applications* (*Байесовская статистика: принципы, модели и приложения*), John Wiley (New York, N.Y.).

[15] Box, G. E. P., Hunter, W. G. and Hunter, J. S. (1978), *Statistics for experimenters* (*Статистика для экспериментаторов*), John Wiley (New York, N.Y.).

[16] Welch, B. L. (1936), *J. R. Stat. Soc. Suppl.* **3**, 29-48; (1938), *Biometrika* **29**, 350-362; (1947), *ibid.* **34**, 28-35.

[17] Fairfield-Smith, H. (1936), *J. Counc. Sci. Indust. Res.* (*Australia*) **9**(3), 211.

[18] Satterthwaite, F. E. (1941), *Psychometrika* **6**, 309-316; (1946) *Biometrics Bull.* **2**(6), 110-114.

[19] ISO Guide 35:1989, *Certification of reference materials - General and statistical principles* (*Сертификация стандартных образцов - Общие и статистические принципы*), Международная организация по стандартизации (Женева, Швейцария).

[20] Barker, T. B. (1985), *Quality by experimental design* (*Качество планированием эксперимента*), Marcel Dekker (New York, N.Y.).

Алфавитный указатель

Е

З

И

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Х

Ц

Ч

Э

Первая редакция Международная
организация по стандартизации.
1993 г.
ISBN 92-67-10188-9

Перевод и публикация
ГП "ВНИИМ им. Д.И.Менделеева"
1999 г.
ISBN 5-88323-002-4

Отпечатано в
ООО "Типография ЛИТАС+",
Лицензия: ПЛД № 69-302
Зак. №365, Тираж: 1000 экз.
1999 г.