

Моисеева Н.П.

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И РАЗНОСТИ ТЕМПЕРАТУР С УЧЕТОМ КОРРЕЛЯЦИИ

Введение

Сейчас практически все поверочные центры уже столкнулись с необходимостью расчета неопределенности измерений при поверке термометров сопротивления. Этого требуют международные нормы, и новый Российский стандарт ГОСТ Р 8.624-2206 дает упрощенный алгоритм расчета. Фактически неопределенность поверки термометров является оценкой измерительных возможностей лабораторий, т.к. зависит она, прежде всего, от используемого оборудования и образцовых СИ. Сейчас расширенная неопределенность поверки одной лаборатории может превышать неопределенность поверки в другой лаборатории в 10 раз и более. Однако выбор оборудования зависит от измерительной задачи и требуемой точности поверяемого ТС. Соотношение цена-качество тоже всегда должно учитываться.

Оценка неопределенности измерений, выполненных при поверке, – это, безусловно, шаг вперед в деле обеспечения качества поверочных работ. И все же необходимо иметь в виду, что потребителей термометров, для которых производится поверка, интересует погрешность и неопределенность результатов измерения температуры, полученных с помощью поверенного термометра. Если для рабочих ТС погрешность определена классом допуска, то для термометров с индивидуальной градуировкой и индивидуальными требованиями к точности неопределенность измерения зависит от неопределенности градуировочных коэффициентов и от условий измерения, обеспечиваемых самим потребителем. Поскольку условия измерений могут быть самыми разными и от поверителя никак не зависят, в данной статье будет обсуждаться влияние именно точности поверки на измерение температуры в рабочем диапазоне термометра.

Расчет неопределенности измерения температуры, выполненных рабочим термометром сопротивления с индивидуальной градуировкой, на первый взгляд, не является сложной задачей, поскольку сама функция преобразования имеет довольно простой вид, и в диапазоне выше нуля представляет собой полином второй степени. Во многих случаях для приблизительной оценки неопределенности в интервале температур допускается простая линейная интерполяция неопределенности между градуировочными точками. Однако всякая приблизительность должна быть обоснована. В данной работе мы попытаемся решать задачу наиболее точно, используя методы, установленные в «Руководстве по выражению неопределенности в измерениях» [1]. Будет рассмотрена модель, в которой учитывается, что поверка в градуировочных точках осуществляется с помощью одного и того же измерительного оборудования, что приводит к взаимозависимости (или так называемой корреляции) неопределенностей поверки в разных точках. Особенно важно учесть корреляцию при поверке термометров для измерения разности температур. Как будет показано ниже, с учетом корреляции расширенная неопределенность измерения разности температур может быть очень существенно уменьшена.

Индивидуальная градуировка рабочего ТС.

Индивидуальная градуировочная функция для рабочих платиновых ТС может строиться по методике МТШ-90 или на основе зависимости Каллендара Ван Дюзена. Полученные кривые будут несколько различными и если возможно, рекомендуется для прецизионных ТС отдавать предпочтение методике МТШ-90. Эта методика, однако, требует градуировки

в реперных точках МТШ-90 или при температурах, близких к этим точкам. Для термометров низших разрядов, в том числе входящих в комплекты для измерения разности температур, обычно с успехом используется простая квадратичная зависимость Каллендара Ван Дюзена. Рассмотрим очень распространенный вариант градуировки платиновых термометров в трех градуировочных точках 0, 100, 180 °С.

Бюджет неопределенности при поверке в данных точках с использованием типичного оборудования, приведен в табл.1-3. В данных таблицах не указаны конкретные средства измерений, но все погрешности термостатов и измерительных установок взяты из реальной жизни. Предполагается, что измерения сопротивления проводятся на одной и той же установке для образцовых и рабочих ТС.

Таблица 1. Бюджет неопределенности градуировки ТС номиналом 500 Ом при температуре 0°С

Источник неопределенности	Исходные данные	расчет в исх. единицах	перевод в Ом (умнож на чувст. 2 Ом/°С)
Случайные эффекты при измерении ТС	СКО среднего знач., Ом	1.000E-03	1.000E-03
Случайные эффекты при измерении ЭТС	СКО среднего знач., Ом	1.000E-04	1.000E-04
Нестабильность температуры в термостате	пределы колебаний темп. за 15 мин. ± 0,0005°С	2.890E-04	5.780E-04
Неоднородность температуры в раб. объеме	изменение температуры в рабочем объеме термостата (на длине ЧЭ термометров) ± 0,001 °С	5.780E-04	1.156E-03
Градуировка эталонного термометра	ЭТС-10, 3 разряд доверительная погрешность при 0 °С ± 0,02 °С	1.000E-02	2.000E-02
Электроизмерительная установка	предел допустимой погрешности сопр. 500 Ом, ток 0.4 мА ± 0,005 Ом	1.667E-03	1.667E-03
Нестабильность эталонного термометра за межповерочный интервал.	изменение сопротивления ТС за межповерочный интервал ± 0,05 °С	2.890E-02	5.780E-02
			Ом
Коррелированные неопр.			0.06119
Некоррелир неопр			0.00164
Суммарная стандартная неопределенность, Ом			0.061210

Таблица 2. Бюджет неопределенности градуировки ТС номиналом 500 Ом при температуре 100°C в жидкостном термостате.

Источник неопределенности	Исходные данные	расчет в исх. единицах	перевод в Ом (умнож на чувст. 2 Ом/°C)
Случайные эффекты при измерении ТС	СКО среднего знач., Ом	1.000E-03	1.000E-03
Случайные эффекты при измерении ЭТС	СКО среднего знач., Ом	5.000E-04	5.000E-04
Нестабильность температуры в термостате	пределы колебаний темп. за 15 мин. ± 0,005 °C	2.890E-03	5.780E-03
Неоднородность температуры в раб. объеме	изменение температуры в рабочем объеме термостата (на длине ЧЭ термометров) ± 0,001 °C	5.780E-04	1.156E-03
Градуировка эталонного термометра	ЭТС-10, 3 разряд доверительная погрешность при 100 °C ± 0,03 °C	1.500E-02	3.000E-02
Электроизмерительная установка	предел допустимой погрешности сопр. 500 Ом, ток 0.4 мА ± 0,005 Ом	1.667E-03	1.667E-03
Нестабильность эталонного термометра за межповерочный интервал.	изменение сопротивления ТС за межповерочный интервал ± 0,05 °C	2.890E-02	5.780E-02
Коррелированные неопр.			Ом
Некоррелир неопр			0.06515
Суммарная стандартная неопределенность, Ом			0.00600
			0.06542

Таблица 3. Бюджет неопределенности градуировки ТС номиналом 500 Ом при температуре 180°C.

Источник неопределенности	Исходные данные	расчет в исх. единицах	перевод в Ом (умнож на чувст. 2 Ом/°C)
Случайные эффекты при измерении ТС	СКО среднего знач., Ом	1.000E-03	1.000E-03
Случайные эффекты при измерении ЭТС	СКО среднего знач., Ом	5.000E-04	5.000E-04
Нестабильность температуры в термостате	пределы колебаний темп. за 15 мин. ± 0,01 °C	5.780E-03	1.156E-02
Неоднородность температуры в раб. объеме	изменение температуры в рабочем объеме термостата	5.780E-04	1.156E-03

	(на длине ЧЭ термометров) ± 0,001 °C		
Градуировка эталонного термометра	ЭТС-10, 3 разряд доверительная погрешность при 100 °C ± 0,04 °C	2.000E-02	4.000E-02
Электроизмерительная установка	предел допустимой погрешности сопр. 500 Ом, ток 0.4 мА ± 0,005 Ом	1.667E-03	1.667E-03
Нестабильность эталонного термометра за межповерочный интервал.	изменение сопротивления ТС за межповерочный интервал ± 0,05 °C	2.890E-02	5.780E-02
Коррелированные неопр.			Ом
Некоррелир неопр			0.07031
Суммарная стандартная неопределенность, Ом			0.01167
			0.07127

В таблицах в затененных ячейках показаны неопределенности, которые являются общими для всех градуировочных точек, т.е. коррелированными с коэффициентом корреляции равным 1. Неопределенности, возникающие от чисто случайных эффектов, а также от нестабильности температуры в термостатах не являются коррелированными. Что характерно для подобных градуировок ТС, коррелированные стандартные неопределенности в сумме в несколько раз превышают некоррелированные.

Рассмотрим классическое уравнение распространения (или, как иногда говорят, транспонирования) неопределенностей на интервал.

$$u_c^2(t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \rho_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u_{x_i} u_{x_j} \quad (1)$$

В нашем случае функция f представляет собой функцию Каллендара $R(t) = R_0(1+At+Bt^2)$. Коэффициенты R_0 , A , B данной функции вычисляются исходя из измеренных в трех точках градуировки t_1 , t_2 , t_3 сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 . Не представляет труда получить аналитическое выражение для $R(t, t_1, t_2, t_3, R_1, R_2, R_3)$, однако, поскольку это выражение довольно громоздкое, не будем усложнять статью видом данной формулы. Неопределенности, присущие градуировке ТС в трех точках, могут быть полностью переведены в эквивалент сопротивления, оставляя фиксированными значения температур. Именно это и было сделано в табл. 1. Таким образом, переменные x_i функции f , по которым производится дифференцирование в (1), представляют собой R_1 , R_2 , R_3 , а суммарные стандартные неопределенности u_{x_i} это неопределенности измерения сопротивлений u_1 , u_2 , u_3 в точках градуировки. Коэффициенты корреляции $\rho_{i,j}$ должны отражать взаимозависимость между результатами измерений R_1 , R_2 , R_3 , которая основана на том факте, что используется одна и та же измерительная аппаратура и образцовый термометр. Вычислить точное значение коэффициента корреляции довольно сложно, но, учитывая аддитивный характер суммарной неопределенности, можно разделить

неопределенности некоррелированные и коррелированные полностью (коэффициент ρ_{ij} равен 1), отдельно рассчитать их вклад в $u_c^2(t)$, затем сложить. Для некоррелированных неопределенностей второй член формулы исчезает.

Оценим расхождение между функциями распространения стандартных неопределенностей на интервал температур, рассчитанными с учетом корреляции неопределенностей в точках градуировки и без учета корреляции.

Первый вариант расчета $u_c(t)$ – без учета корреляции.

Формула выглядит следующим образом:

$$u_c^2(t) = \left(\frac{\partial R}{\partial R_1} \right)^2 u_1^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2} \right)^2 u_2^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_3} \right)^2 u_3^2 \quad (2)$$

где символом R обозначена функция $R(t, t_1, t_2, t_3, R_1, R_2, R_3)$, u_1, u_2, u_3 - неопределенности измерения сопротивлений в точках градуировки.

Второй вариант расчета $u_c(t)$ – с учетом корреляции.

Формула состоит из двух частей: первая часть, записанная для некоррелированных стандартных неопределенностей, аналогична формуле (2), вторая часть включает дополнительный член, учитывающий корреляцию сопротивлений.

$$u_c^2(t) = \left(\frac{\partial R}{\partial R_1} \right)^2 u_{n1}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2} \right)^2 u_{n2}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_3} \right)^2 u_{n3}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_1} \right)^2 u_{k1}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2} \right)^2 u_{k2}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_3} \right)^2 u_{k3}^2 + 2 \left[\frac{\partial R}{\partial R_1} \frac{\partial R}{\partial R_2} u_{k1} u_{k2} + \frac{\partial R}{\partial R_1} \frac{\partial R}{\partial R_3} u_{k1} u_{k3} + \frac{\partial R}{\partial R_2} \frac{\partial R}{\partial R_3} u_{k2} u_{k3} \right] \quad (3)$$

где u_{n1}, u_{n2}, u_{n3} – суммарные некоррелированные стандартные неопределенности измерения сопротивлений в точках градуировки; u_{k1}, u_{k2}, u_{k3} – суммарные коррелированные стандартные неопределенности (см. табл. 1-3).

Функция $u_c(t)$ была рассчитана по формулам (2) и (3) и графически представлена на рис. 1.

Из рисунка можно сделать однозначный вывод о сильном влиянии корреляции неопределенностей поверки термометра в точках градуировки для оценки неопределенности измерений температуры в интервале между точками.

С другой стороны, данный график подтверждает возможность применения простой линейной интерполяции для определения распространения неопределенности на интервал температур, что также является важным и находит применение на практике. Однако, линейная модель близка к реальности только при сильной корреляции измеренных сопротивлений, если суммарные коррелированные неопределенности на много превышают суммарные некоррелированные неопределенности. Если коррелированные и некоррелированные части равны, то сглаживания кривой не происходит, что можно

видеть на рис. 2, на котором представлена теоретическая модель, в которой $u_{н1}, u_{н2}, u_{н3}, u_{к1}, u_{к2}, u_{к3}$ – равны между собой и равны 0,01 Ом.

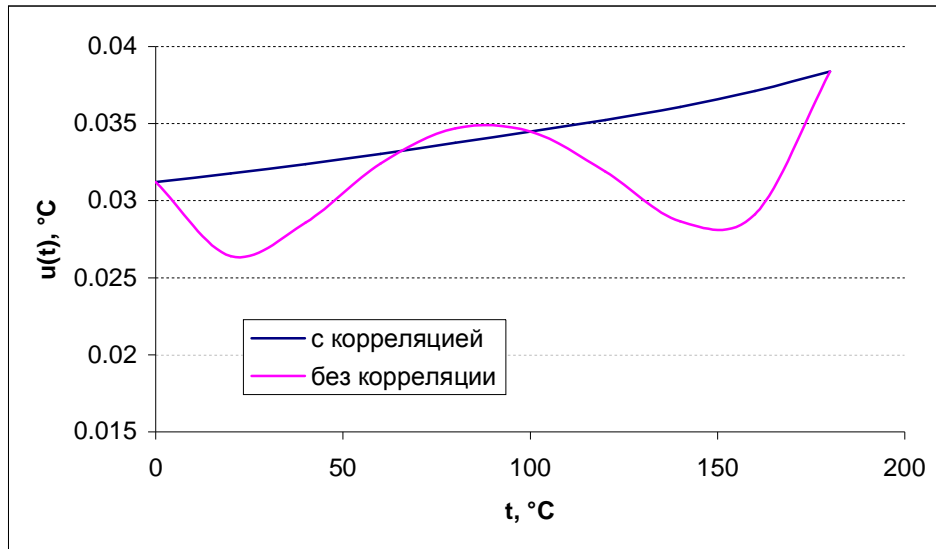


Рис. 1. Неопределенность измерения температуры в интервале. Стандартные неопределенности соответствуют табл. 1-3.

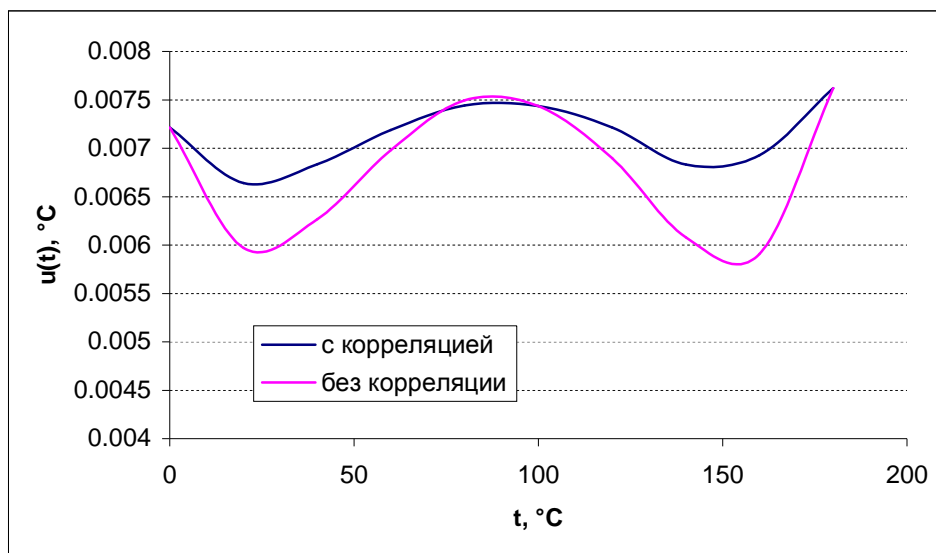


Рис. 2. Неопределенность измерения температуры в интервале. Коррелированные и некоррелированные суммарные стандартные неопределенности во всех точках равны. (Примечание: в эквиваленте температуры неопределенности в данном примере немного различаются из-за изменения чувствительности термометра с температурой)

Учет корреляции при измерении разности температур.

Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда два термометра, измеряющие разность температур, градуируются в одних и тех же термостатах с использованием одного и того же измерительного моста и образцового термометра. Корреляция градуировочных значений в этом случае очевидна. Оценим, как она влияет на суммарную неопределенность измеренной разности температур.

Функция разности температур имеет вид

$$U(r_1, r_2, r_3, R_1, R_2, R_3, t) = R(R_1, R_2, R_3, T) - R(r_1, r_2, r_3, t), \quad (4)$$

где R_1, R_2, R_3 – градуировочные сопротивления «горячего» термометра, r_1, r_2, r_3 – градуировочные сопротивления «холодного» термометра. Неопределенности сопротивлений для обоих термометров примем равными u_1, u_2, u_3 с теми же коррелированными и некоррелированными суммарными неопределенностями, что и табл. 1-3. Применим закон распространения неопределенности (1) к формуле (4), разделив коррелированные и некоррелированные неопределенности и учитывая коэффициенты корреляции, равные 1 также между сопротивлениями, измеренными двумя термометрами во всех точках градуировки.

$$u_{\Delta}^2(t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial R_i} \right)^2 u_i^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial r_i} \right)^2 u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial U}{\partial R_i} \frac{\partial U}{\partial R_j} u_{ci} u_{cj} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial U}{\partial r_i} \frac{\partial U}{\partial r_j} u_{ci} u_{cj} + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial U}{\partial R_i} \frac{\partial U}{\partial r_j} u_{ci} u_{cj} \quad (5)$$

где N – количество точек градуировки. В данном случае $N = 3$.

u_i – суммарные неопределенности сопротивлений в точках градуировки,

u_{ci} – коррелированные суммарные неопределенности сопротивлений в точках градуировки,

Данная формула является наиболее точным выражением для зависимости неопределенности разности температур от измеряемой температуры. Чаще всего пользуются упрощениями формулы, связанными либо с игнорированием корреляции неопределенностей, либо с полным исключением коррелированных неопределенностей. Интересно сравнить данные упрощения и выяснить, на сколько они правомерны.

Первое упрощение приводит к следующей формуле:

$$u_{\Delta 1}^2(t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial R_i} \right)^2 u_i^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial r_i} \right)^2 u_i^2 \quad (6)$$

Второе упрощение учитывает только некоррелированные неопределенности:

$$u_{\Delta 1}^2(t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial R_i} \right)^2 u_{ni}^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial r_i} \right)^2 u_{ni}^2 \quad (7)$$

где u_{ni} – некоррелированные суммарные неопределенности сопротивлений в точках градуировки.

Для анализа расхождения формул (5) и (6) были выбраны две реальные градуировки для двух 500 Омных термометров пленочного типа в точках 0, 100, 180 °С. Температура «холодного» термометра изменялась от 0 до 160 °С, температура «горячего» термометра

всегда была выше температуры «холодного» на 20 °С. В результате получен следующий график.

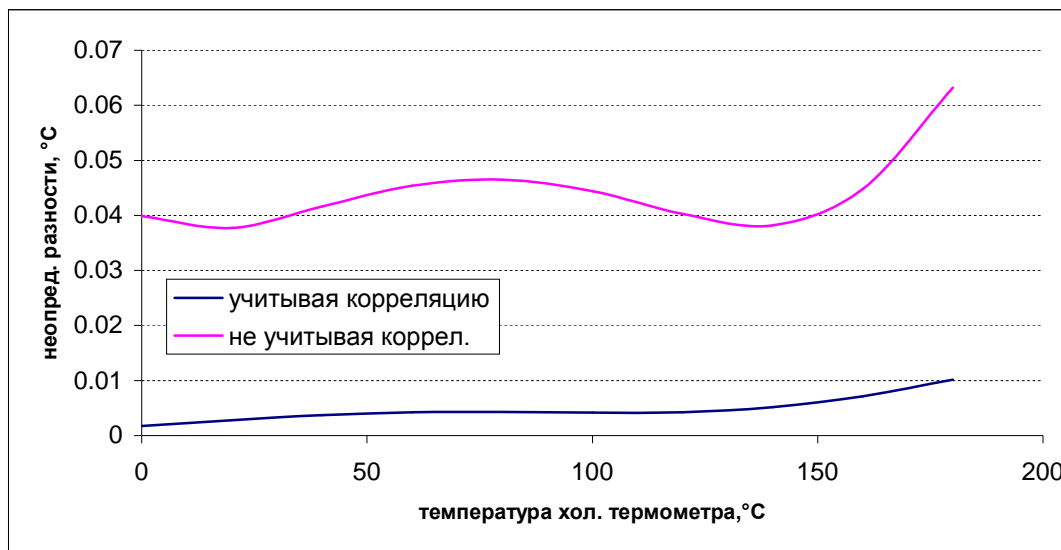


Рис. 3. Неопределенность разности температур, измеренной парой термометров, с учетом корреляции (5) и без учета корреляции (6).

Из графика очевидно, что учет корреляции приводит к существенному снижению неопределенности измерения разности температур. Этот вывод очень важен при проведении оценки неопределенностей КТСНР.

Проверим, нельзя ли упростить вычисления и, как некоторые делают, просто удалить коррелированные стандартные неопределенности из расчета. Сравним результат, получаемый при применении формул (5) и (7). Полученное расхождение в функции температуры представлено на Рис. 4.

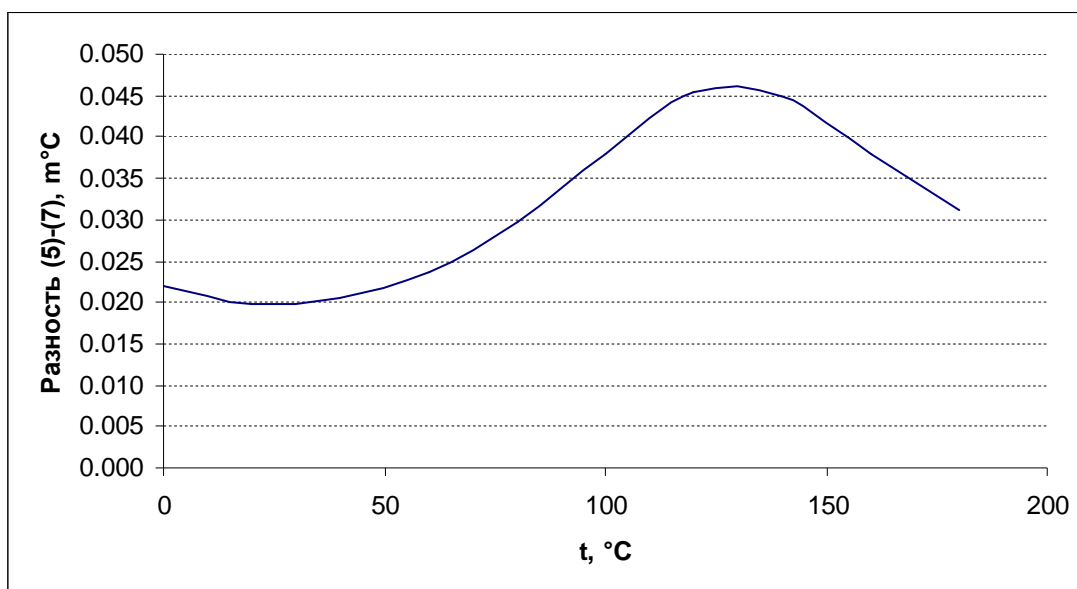


Рис. 3. Расхождение неопределенности разности температур, рассчитанной с учетом корреляции (5) и с полным исключением коррелированных членов бюджета неопределенности (7).

Данный график рассчитан для разности температур между «горячим» и «холодным» термометром равной 20 °С. При увеличении данной разности значения функции на графике будут расти. Однако, оценка для разности 80 °С показывает, что расхождение двух методов будет не более 0,5 мК, что очень мало для данной измерительной задачи. Выводы из анализа, проведенного в данной главе, оптимистичные для поверителей и потребителей термометров для измерения разности температур. Поскольку расхождение между точным расчетом неопределенности разности в интервале температур очень мало по сравнению с абсолютным значением неопределенности, можно с успехом применять упрощенный вариант формулы (7), т.е. просто складывать некоррелированные неопределенности двух термометров для каждой градуировочной точки и проводить линейную интерполяцию между ними. В примере, рассмотренном в данной работе, для бюджета неопределенности градуировки каждого ТС, представленного в табл. 1-3, график неопределенности разности температур будет соответствовать нижней кривой на рис.3. Следует при этом еще раз отметить, что неопределенность разности не превышает 0,01 °С, в то время, как суммарные неопределенности в градуировочных точках достигают 0,038 °С. Таким образом учет корреляции при измерении разности температур является обязательным!

Выводы

В данной работе мы попытались теоретически обосновать два важных момента в процедуре оценки неопределенности измерения температуры в интервале, которая возникает из-за наличия неопределенностей поверки в градуировочных точках.

Во-первых было доказано, что в случае превышения суммарных коррелированных неопределенностей над некоррелированными можно использовать линейную интерполяцию для получения неопределенностей в интервале.

Во-вторых было показано, что для выражения неопределенности разности температур, измеренной двумя термометрами, градуированными с помощью одной и той же аппаратуры необходимо учитывать корреляцию, что снизит суммарную неопределенность разности в несколько раз. Кроме того, можно пользоваться упрощенной формулой, исключая все коррелированные неопределенности. Неопределенность разности в интервале может быть рассчитана линейной интерполяцией некоррелированных суммарных неопределенностей между градуировочными точками.

Литература

1. Руководство по оцениванию неопределенности в измерении (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*) (Принят Международной организацией по стандартизации, Женева, 1993)