

Моисеева Н.П.

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И РАЗНОСТИ ТЕМПЕРАТУР С УЧЕТОМ КОРРЕЛЯЦИИ

Введение

Сейчас практически все поверочные центры России уже столкнулись с необходимостью расчета неопределенности измерений при поверке термометров сопротивления. Этому требуют международные нормы, и новый Российский стандарт ГОСТ Р 8.624-2006 [1] дает упрощенный алгоритм расчета. Фактически неопределенность поверки термометров является оценкой измерительных возможностей лабораторий, т.к. зависит она, прежде всего, от используемого оборудования и образцовых СИ. Сейчас расширенная неопределенность поверки одной лаборатории может превышать неопределенность поверки в другой лаборатории в 10 раз и более. Однако выбор оборудования зависит от измерительной задачи и требуемой точности поверяемого ТС. Соотношение цена-качество тоже всегда должно учитываться.

Оценка неопределенности измерений, выполненных при поверке – это безусловно шаг вперед в деле обеспечения качества поверочных работ. И все же необходимо иметь в виду, что потребителей термометров, для которых производится поверка, интересует погрешность и неопределенность термометра во всем интервале рабочих температур при эксплуатации. Если для рабочих ТС погрешность определена классом допуска, то для термометров с индивидуальной градуировкой и индивидуальными требованиями к точности неопределенность измерения зависит от неопределенности градуировочных коэффициентов и от условий измерения, обеспечиваемых самим потребителем.

Поскольку условия измерений могут быть самыми разными и от поверителя никак не зависят, в данной статье будет обсуждаться влияние именно неопределенности поверки ТС на неопределенность измерения температуры в рабочем диапазоне термометра.

Расчет неопределенности измерения температуры, выполненных рабочим термометром сопротивления с индивидуальной градуировкой, на первый взгляд, не является сложной задачей, поскольку сама функция преобразования Каллендара Ван Дюзена (КВД) имеет довольно простой вид, и в диапазоне выше нуля представляет собой полином второй степени. Во многих случаях для приблизительной оценки неопределенности в интервале температур допускается простая линейная интерполяция неопределенности между градуировочными точками. Однако всякая приблизительность должна быть обоснована. В данной работе мы попытаемся решать задачу наиболее точно, используя методы, установленные в «Руководстве по выражению неопределенности в измерениях» [2]. Будет рассмотрена модель, в которой учитывается, что поверка в градуировочных точках осуществляется с помощью одного и того же измерительного оборудования, что приводит к взаимозависимости (или так называемой корреляции) неопределенностей поверки в разных точках. Особенно важно учесть корреляцию при поверке термометров для измерения разности температур. Как будет показано ниже, с учетом корреляции расширенная неопределенность измерения разности температур может быть очень существенно уменьшена.

Индивидуальная градуировка рабочего ТС.

Индивидуальная градуировочная функция для рабочих платиновых ТС может строиться по методике МТШ-90 или на основе зависимости КВД.

Полученные кривые будут несколько различными и если это возможно, рекомендуется для прецизионных ТС отдавать предпочтение методике МТШ-90. Эта методика, однако, требует градуировки в реперных точках затвердевания металлов или при температурах, близких к этим точкам. Для термометров низших разрядов, в том числе входящих в комплекты для измерения разности температур, использование метода МТШ-90 экономически не выгодно. Обычно для их градуировки с успехом используется простая квадратичная зависимость КВД, полученная методом сличения с эталонным термометром в жидкостном термостате. Рассмотрим очень распространенный вариант градуировки платиновых термометров в трех градуировочных точках 0, 100, 180 °С.

Бюджет неопределенности при поверке в данных точках с использованием типичного оборудования, приведен в табл.1-3. В данных таблицах не указаны конкретные средства измерений, но все погрешности термостатов и измерительных установок взяты из реальной практики. Предполагается, что измерения сопротивления проводятся на одной и той же установке для образцовых и рабочих ТС.

Таблица 1. Бюджет неопределенности градуировки ТС номиналом 500 Ом при температуре 0°С

Источник неопределенности и исходные данные	Стандартная неопределенность	Стандартная неопределенность, Ом
Случайные эффекты при измерении сопротивления ТС (СКО = $1 \cdot 10^{-3}$ Ом)	$1 \cdot 10^{-3}$ Ом	$1 \cdot 10^{-3}$
Случайные эффекты при измерении сопротивления ЭТС (СКО = $1 \cdot 10^{-4}$ Ом)	$1 \cdot 10^{-4}$ Ом	$1 \cdot 10^{-4}$
Нестабильность температуры в термостате (пределы колебаний темп. за 15 мин. составляют $\pm 0,0005^\circ\text{C}$)	$2,89 \cdot 10^{-4}$ °С	$5,78 \cdot 10^{-4}$

Неоднородность температуры в раб. объеме (изменение температуры в рабочем объеме термостата на длине ЧЭ термометров равно $\pm 0,001$ °С)	$5,78 \cdot 10^{-4}$ °С	$1,156 \cdot 10^{-3}$
Градуировка эталонного термометра (ЭТС-10, 3 разряд доверительная погрешность при 0 °С $\pm 0,02$ °С)	$1 \cdot 10^{-2}$ °С	$2 \cdot 10^{-2}$
Электроизмерительная установка (предел допустимой погрешности $\pm 0,005$ Ом)	$1,67 \cdot 10^{-3}$ Ом	$1,67 \cdot 10^{-3}$
Нестабильность эталонного термометра за межповерочный интервал. (изменение сопротивления ТС при $0,01$ °С за межповерочный интервал равно $\pm 0,05$ °С)	$2,89 \cdot 10^{-2}$ °С	$5,78 \cdot 10^{-2}$
Суммарная коррелированная неопределенность, Ом		0.06119
Суммарная некоррелированная неопределенность, Ом		0.00164
Суммарная неопределенность, Ом		0.061210

Таблица 2. Бюджет неопределенности градуировки ТС номиналом 500 Ом при температуре 100°С в жидкостном термостате.

Источник неопределенности и исходные данные	Стандартная неопределенность	Стандартная неопределенность, Ом
Случайные эффекты при измерении сопротивления ТС (СКО = $1 \cdot 10^{-3}$ Ом)	$1 \cdot 10^{-3}$ Ом	$1 \cdot 10^{-3}$
Случайные эффекты при измерении сопротивления ЭТС (СКО = $5 \cdot 10^{-4}$ Ом)	$5 \cdot 10^{-4}$ Ом	$5 \cdot 10^{-4}$

Нестабильность температуры в термостате (пределы колебаний темп. за 15 мин. составляют $\pm 0,0005^\circ\text{C}$)	$2,89 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}$	$5,78 \cdot 10^{-4}$
Неоднородность температуры в раб. объеме (изменение температуры в рабочем объеме термостата на длине ЧЭ термометров равно $\pm 0,001 \text{ }^\circ\text{C}$)	$5,78 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}$	$1,156 \cdot 10^{-3}$
Градуировка эталонного термометра (ЭТС-10, 3 разряд доверительная погрешность при $100 \text{ }^\circ\text{C} \pm 0,03 \text{ }^\circ\text{C}$)	$1,5 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C}$	$3 \cdot 10^{-2}$
Электроизмерительная установка (предел допустимой погрешности $\pm 0,005 \text{ Ом}$)	$1,67 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}$	$1,67 \cdot 10^{-3}$
Нестабильность эталонного термометра за межповерочный интервал. (изменение сопротивления ТС при $0,01 \text{ }^\circ\text{C}$ за межповерочный интервал равно $\pm 0,05 \text{ }^\circ\text{C}$)	$2,89 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C}$	$5,78 \cdot 10^{-2}$
Суммарная коррелированная неопределенность, Ом		0.06515
Суммарная некоррелированная неопределенность, Ом		0.00600
Суммарная неопределенность, Ом		0.06542

Таблица 3. Бюджет неопределенности градуировки ТС номиналом 500 Ом при температуре 180°C .

Источник неопределенности и исходные данные	Стандартная неопределенность	Стандартная неопределенность, Ом
Случайные эффекты при измерении сопротивления ТС (СКО = $1 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}$)	$1 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}$	$1 \cdot 10^{-3}$

Случайные эффекты при измерении сопротивления ЭТС (СКО = $5 \cdot 10^{-4}$ Ом)	$5 \cdot 10^{-4}$ Ом	$5 \cdot 10^{-4}$
Нестабильность температуры в термостате (пределы колебаний темп. за 15 мин. составляют $\pm 0,01^\circ\text{C}$)	$5,78 \cdot 10^{-3}$ °C	$1,156 \cdot 10^{-2}$
Неоднородность температуры в раб. объеме (изменение температуры в рабочем объеме термостата на длине ЧЭ термометров равно $\pm 0,001$ °C)	$5,78 \cdot 10^{-4}$ °C	$1,156 \cdot 10^{-3}$
Градуировка эталонного термометра (ЭТС-10, 3 разряд доверительная погрешность при $180^\circ\text{C} \pm 0,04^\circ\text{C}$)	$2,0 \cdot 10^{-2}$ °C	$4,0 \cdot 10^{-2}$
Электроизмерительная установка (предел допустимой погрешности $\pm 0,005$ Ом)	$1,67 \cdot 10^{-3}$ Ом	$1,67 \cdot 10^{-3}$
Нестабильность эталонного термометра за межповерочный интервал. (изменение сопротивления ТС при $0,01^\circ\text{C}$ за межповерочный интервал равно $\pm 0,05^\circ\text{C}$)	$2,89 \cdot 10^{-2}$ °C	$5,78 \cdot 10^{-2}$
Суммарная коррелированная неопределенность, Ом		0.07031
Суммарная некоррелированная неопределенность, Ом		0.01167
Суммарная неопределенность, Ом		0.07127

В таблицах в жирным шрифтом показаны стандартные неопределенности, которые являются общими для всех градуировочных точек, т.е. коррелированными с коэффициентом корреляции равным 1.

Неопределенности, возникающие от чисто случайных эффектов, а также от нестабильности температуры в термостатах не являются коррелированными. Что характерно для подобных градуировок ТС, коррелированные стандартные неопределенности в сумме в несколько раз превышают некоррелированные.

Рассмотрим классическое уравнение распространения (или, как иногда говорят, транспонирования) неопределенностей на интервал.

$$u_c^2(t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \rho_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u_{x_i} u_{x_j} \quad (1)$$

где $f(x_i)$ – интерполяционная функция,

u_{x_i} – неопределенности аргументов функции,

$\rho_{i,j}$ – коэффициент корреляции аргументов.

В нашем случае функция $f(x_i)$ представляет собой функцию Каллендара $R(t) = R_0(1 + At + Bt^2)$. Коэффициенты R_0, A, B данной функции вычисляются исходя из измеренных в трех точках градуировки t_1, t_2, t_3 сопротивлений R_1, R_2, R_3 . Не представляет труда получить аналитическое выражение для $R(t, t_1, t_2, t_3, R_1, R_2, R_3)$, однако, поскольку это выражение довольно громоздкое, не будем усложнять статью видом данной формулы. Для удобства расчетов, все стандартные неопределенности в табл. 1-3 были представлены в единицах электрического сопротивления (Ом). Таким образом, аргументы x_i функции $f(x_i)$, по которым производится дифференцирование в (1) представляют собой R_1, R_2, R_3 , а суммарные стандартные неопределенности u_{x_i} это суммарные стандартные неопределенности измерения u_1, u_2, u_3 в точках градуировки (табл. 1-3). Коэффициенты корреляции $\rho_{i,j}$ должны отражать

взаимозависимость между результатами измерений R_1, R_2, R_3 , которая основана на том факте, что используется одна и та же измерительная аппаратура и образцовый термометр. Вычислить точное значение коэффициента корреляции довольно сложно, но, учитывая аддитивный характер суммарной неопределенности, можно разделить неопределенности некоррелированные и коррелированные полностью (коэффициент $\rho_{i,j}$ равен 1), отдельно рассчитать их вклад в $u_c^2(t)$, затем сложить. Для некоррелированных неопределенностей второй член формулы исчезает.

Оценим расхождение между функциями распространения стандартных неопределенностей на интервал температур, рассчитанными с учетом корреляции неопределенностей в точках градуировки и без учета корреляции.

Первый вариант расчета $u_c(t)$ – без учета корреляции.

Формула выглядит следующим образом:

$$u_c^2(t) = \left(\frac{\partial R}{\partial R_1} \right)^2 u_1^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2} \right)^2 u_2^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_3} \right)^2 u_3^2 \quad (2)$$

где символом R обозначена функция $R(t, t_1, t_2, t_3, R_1, R_2, R_3)$, u_1, u_2, u_3 - неопределенности измерения сопротивлений в точках градуировки.

Второй вариант расчета $u_c(t)$ – с учетом корреляции.

Формула состоит из двух частей: первая часть, записанная для некоррелированных стандартных неопределенностей, аналогична формуле (2), вторая часть включает дополнительный член, учитывающий корреляцию сопротивлений.

$$\begin{aligned}
u_c^2(t) = & \left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right)^2 u_{n1}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right)^2 u_{n2}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_3}\right)^2 u_{n3}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right)^2 u_{k1}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right)^2 u_{k2}^2 \\
& + \left(\frac{\partial R}{\partial R_3}\right)^2 u_{k3}^2 + 2 \left[\frac{\partial R}{\partial R_1} \frac{\partial R}{\partial R_2} u_{k1} u_{k2} + \frac{\partial R}{\partial R_1} \frac{\partial R}{\partial R_3} u_{k1} u_{k3} + \frac{\partial R}{\partial R_2} \frac{\partial R}{\partial R_3} u_{k2} u_{k3} \right]
\end{aligned}$$

(3)

где u_{n1}, u_{n2}, u_{n3} – суммарные некоррелированные стандартные неопределенности измерения сопротивлений в точках градуировки; u_{k1}, u_{k2}, u_{k3} – суммарные коррелированные стандартные неопределенности (см. табл. 1-3).

Функция $u_c(t)$ была рассчитана по формулам (2) и (3) и графически представлена на рис. 1.

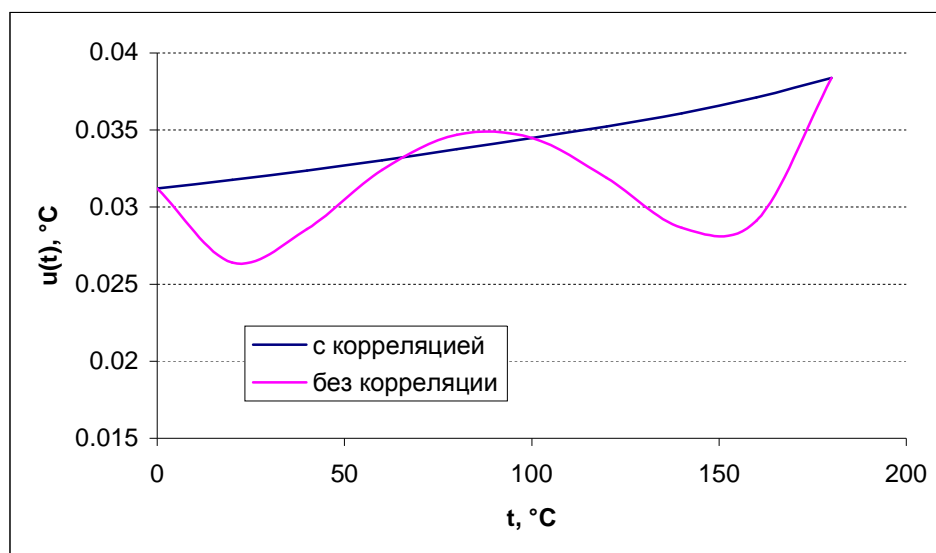


Рис. 1. Неопределенность измерения температуры в интервале. Стандартные неопределенности соответствуют табл. 1-3.

Из рисунка можно сделать однозначный вывод о сильном влиянии корреляции неопределенностей поверки термометра в точках

градуировки на неопределенность измерений температуры в интервале между точками.

С другой стороны, данный график подтверждает возможность применения простой линейной интерполяции для определения распространения неопределенности на интервал температур, что также является важным и находит применение на практике. Однако, линейная модель близка к реальности только при сильной корреляции измеренных сопротивлений, если суммарные коррелированные неопределенности на много превышают суммарные некоррелированные неопределенности. Если коррелированные и некоррелированные части равны, то сглаживания кривой не происходит, что можно видеть на рис. 2, на котором представлена теоретическая модель, в которой $u_{n1}, u_{n2}, u_{n3}, u_{k1}, u_{k2}, u_{k3}$ – равны между собой и равны 0,01 Ом.

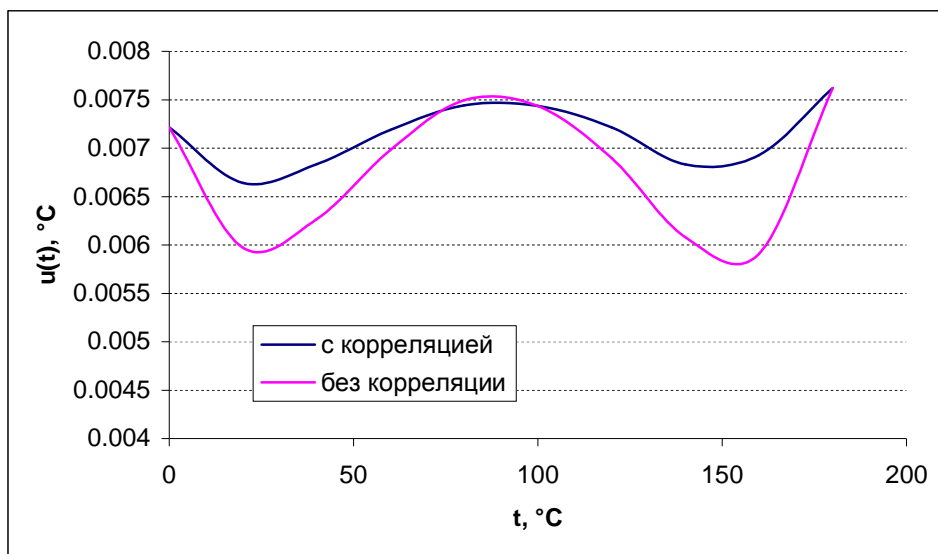


Рис. 2. Неопределенность измерения температуры в интервале.

Коррелированные и некоррелированные суммарные стандартные неопределенности во всех точках равны 0,01 Ом. (Примечание: в эквиваленте температуры неопределенности в данном примере немного

различаются из-за изменения чувствительности термометра с температурой)

Учет корреляции при измерении разности температур.

Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда два термометра, измеряющие разность температур, градуируются в одних и тех же термостатах с использованием одного и того же измерительного моста и образцового термометра. Корреляция градуировочных значений в этом случае очевидна. Оценим, как она влияет на суммарную неопределенность измеренной разности температур.

Функция разности температур имеет вид

$$U(r_1, r_2, r_3, R_1, R_2, R_3, t) = R(R_1, R_2, R_3, T) - R(r_1, r_2, r_3, t), \quad (4)$$

где R_1, R_2, R_3 – градуировочные сопротивления «горячего» термометра, r_1, r_2, r_3 – градуировочные сопротивления «холодного» термометра.

Суммарные стандартные неопределенности сопротивлений для обоих термометров примем равными u_1, u_2, u_3 с теми же коррелированными и некоррелированными суммарными неопределенностями, что и табл. 1-3.

Применим закон распространения неопределенности (1) к формуле (4), разделив коррелированные и некоррелированные неопределенности и учитывая коэффициенты корреляции, равные 1 также между сопротивлениями, измеренными двумя термометрами во всех точках градуировки.

$$u_{\Delta}^2(t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial R_i} \right)^2 u_i^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial r_i} \right)^2 u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial U}{\partial R_i} \frac{\partial U}{\partial R_j} u_{ci} u_{cj} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial U}{\partial r_i} \frac{\partial U}{\partial r_j} u_{ci} u_{cj} + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial U}{\partial R_i} \frac{\partial U}{\partial r_j} u_{ci} u_{cj} \quad (5)$$

где N – количество точек градуировки. В данном случае $N = 3$.

u_i – суммарные неопределенности сопротивлений в точках градуировки,
 u_{ci} , u_{ci} – коррелированные суммарные неопределенности сопротивлений
в точках градуировки.

Данная формула является наиболее точным выражением для зависимости неопределенности разности температур от измеряемой температуры. Чаще всего пользуются упрощениями формулы, связанными либо с игнорированием корреляции неопределенностей, либо с полным исключением коррелированных неопределенностей. Интересно сравнить данные упрощения и выяснить на сколько они правомерны.

Первое упрощение приводит к следующей формуле:

$$u_{\Delta t}^2(t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial R_i} \right)^2 u_i^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial r_i} \right)^2 u_i^2 \quad (6)$$

Второе упрощение учитывает только некоррелированные неопределенности:

$$u_{\Delta t}^2(t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial R_i} \right)^2 u_{ni}^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial r_i} \right)^2 u_{ni}^2 \quad (7)$$

где u_{ni} – некоррелированные суммарные неопределенности сопротивлений в точках градуировки.

Для анализа расхождения формул (5) и (6) были выбраны две реальные градуировки для двух 500 Омных термометров пленочного типа в точках 0, 100, 180 °С. Температура «холодного» термометра изменялась от 0 до

160 °С, температура «горячего» термометра всегда была выше температуры «холодного» на 20 °С. В результате получен следующий график.

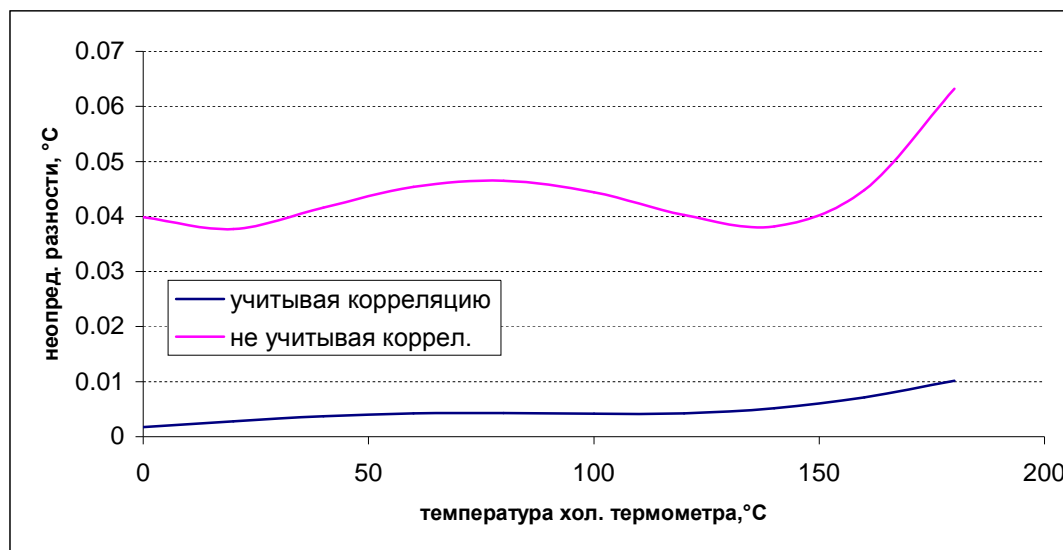


Рис. 3. Неопределенность разности температур, измеренной парой термометров, с учетом корреляции (5) и без учета корреляции (6).

Из графика очевидно, что учет корреляции приводит к существенному снижению неопределенности измерения разности температур. Этот вывод очень важен при проведении оценки неопределенностей поверки комплектов термометров для измерения разности температур, используемых в теплосчетчиках (КТСПР).

Как показывают расчеты, если не принимать в расчет коррелированные стандартные неопределенности и складывать только некоррелированные величины (формула 7), то даже для разности температур «холодного» и «горячего» термометра получим расхождение результатов с формулой (5) менее 1 мК, что очень мало для данной измерительной задачи. Выводы из анализа, проведенного в данной главе, оптимистичные для поверителей и потребителей термометров для измерения разности температур. Поскольку расхождение между точным расчетом

неопределенности разности в интервале температур очень мало по сравнению с абсолютным значением неопределенности, можно с успехом применять упрощенный вариант формулы (7), т.е. просто складывать некоррелированные неопределенности двух термометров для каждой градуировочной точки и проводить линейную интерполяцию между ними.

В примере, рассмотренном в данной работе, для бюджета неопределенности градуировки каждого ТС, представленного в табл. 1-3, неопределенность разности температур в диапазоне 0-160 °С будет соответствовать нижней кривой на рис.3. Следует при этом еще раз отметить, что неопределенность разности не превышает 0,01 °С, в то время, как суммарные неопределенности в градуировочных точках достигают 0,038 °С. Таким образом учет корреляции при измерении разности температур является обязательным.

Выводы

В данной работе мы попытались теоретически обосновать два важных момента в процедуре оценки неопределенности измерения температуры в рабочем диапазоне термометра, которая возникает из-за наличия неопределенностей поверки в градуировочных точках.

Во-первых было доказано, что в случае превышения суммарных коррелированных неопределенностей над некоррелированными можно использовать линейную интерполяцию для получения неопределенностей ТС в диапазоне.

Во-вторых было показано, что для выражения неопределенности разности температур, измеренной двумя термометрами, градуированными с помощью одной и той же аппаратуры необходимо

учитывать корреляцию, что снизит суммарную неопределенность разности в несколько раз.

Литература

1. ГОСТ Р 8.624-2006 «ГСИ. Термометры сопротивления из платины, меди и никеля. Методика поверки».
2. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, 1st ed., Geneva, Switzerland, International Organization for Standardization, 1993, 109 p.